重积分的应用

谢彦桐
北京大学数学科学学院

March 17, 2022

1 知识内容理解

本讲义主要介绍和重积分相关的应用题，包括几何应用题和物理应用题两类。所以应用题的解题步骤都可以分为两步：先根据题目要求写出题目所求重积分；再计算重积分。由于重积分的计算是此前讲义我们已经研究过的，所以本讲义主要探讨如何根据题目要求写出要计算的重积分。此外我们还会介绍一些解析几何中的方法，主要是和曲线和曲面相关的内容，为下一章曲线积分和曲面积分的内容做准备。

1.1 解析几何中的曲线和曲面

所谓解析几何，是指研究几何对象时通过写出其方程来研究几何对象的性质。在高等数学课遇到任何几何对象，如曲线和曲面时，第一步骤永远是写出其方程。然而方程也分为几类，包括直角坐标一般方程，极坐标方程（平面几何图形）和参数方程等，例如平面的单位圆周的一般方程为$x^2+y^2=1$，我们也可以写出其极坐标方程$r=1$。不同的方程在不同的计算需求下各有优劣，一般方程比较直观易懂，而参数方程很适合曲线积分和曲面积分的计算。

曲线

曲线包括平面曲线和空间曲线两种，研究平面曲线通常考虑其一般方程或参数方程（少数情况采用极坐标方程但不常见），空间曲线只有参数方程没有一般方程：

1.平面曲线的一般方程$y=y(x)$，其中自变量取值范围$a<x<b$。

2.平面曲线的参数方程$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases}$，其中自变量取值范围$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$。

3.平面曲线的极坐标方程$r=r(\theta)$，其中自变量取值范围$\alpha\leq\theta\leq\beta$。

4.空间曲线的参数方程$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$，其中自变量取值范围$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$。

不论空间曲线还是平面曲线，其特点是方程自变量只有一个。在讨论曲线方程时，处理关注方程本身，还需要额外注意自变量的取值范围。我们在计算题中遇到的曲线通常不是无限延伸的，所以自变量必然有范围。特别地，**曲线的参数方程是不唯一的**，例如两个参数方程$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$ 和 $\begin{cases} x = \cos(2t), \\ y = \sin(2t), \end{cases}$ $(-\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4})$ 都可以表达单位圆周的上半圆，使用这两种方程研究曲线及其积分是等效的。

曲线的另一个主要概念为其**定向**。即一条曲线，从曲线不同的两端出发走到另一端是需要区分的。同样以半圆的上半周举例，如果顺时针看，即从圆周点$(-1,0)$出发到$(1,0)$，得到曲线参数方程 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$ 。如果逆时针看，即从圆周点$(1,0)$出发到$(-1,0)$，得到曲线参数方程 $\begin{cases} x = \cos(-t) = \cos(t), \\ y = \sin(-t) = -\sin(t), \end{cases}$ $(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$ 在后续学习第二型曲线积分时，我们写出的曲线方程必须对应曲线正确的定向。

曲线的**切向量**是刻画曲线走向的关键，对应直线的方向向量。举例来说，假定一个人拿着手电筒沿着一条曲线的某个定向行走，当他走到某处时，手电筒光柱的方向就是该点的切向量的方向。我们必须掌握通过曲线方程计算切向量的方式：根据参数方程可以计算一点$(x(t),y(t))$的切向量$(x'(t),y'(t))$（三维情况为$(x'(t),y'(t),z'(t))$）；由于一般方程$y=y(x)$可以看作以x为自变量的参数方程，所以可以计算点$(x,y(x))$处切向量$(1,y'(x))$。曲线的切向量可以不归一化，但是需要注意切向量对应的定向，即向量$(-x'(t),-y'(t))$对应曲线相反定向的切向量。

对于平面曲线可以定义**法向量**，即在曲线是一点处，与该点的切向量垂直的向量。对于封闭的曲线而言，曲线将空间分为内外两侧，因此内侧和外侧对应不同的法向量，这一部分将在学习Green公式时讨论。

曲面

空间曲面有一半方程和参数方程两种

1.曲面的一般方程$z=g(x,y)$，其中自变量取值范围$(x,y)\in D$，D是平面区域。几何上看，区域D是空间曲面$z=g(x,y)$在XoY平面的投影。以不同的自变量还可以写出其他的曲面一般方程$x=h(y,z)$或$y=l(x,z)$，他们对于曲面的研究都很重要。

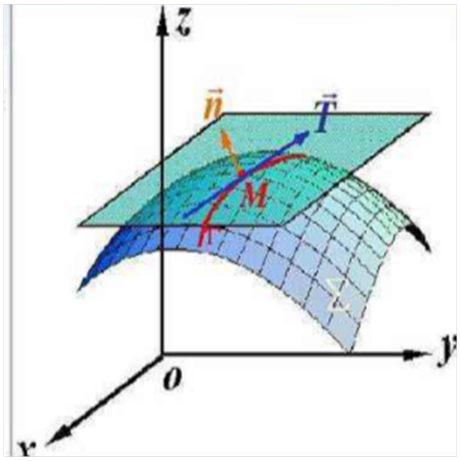

图 1: 曲面一点的切平面和法向量的示意图

2.曲面的参数方程$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$ 其中自变量取值范围$(u,v) \in D'$，其中D'是UoV平面的一个区域。形式上，一般方程也可以看作特殊的参数方程。

曲面方程与曲线方程的最大区别是其有两个自变量，所以自变量的取值范围是平面上的区域。曲面的重要概念是**法向量**和**切平面**，它们表达曲面延展的方向，如图1。一个实际的例子是，一个人站在地球的某一点上，手电筒光柱指向天，那么手电筒光柱的方向便是该点处的法向量的方向。空间中过一点且与该点法向量垂直的平面就是切平面，因此切平面与曲面具有相同的法向量。

曲面的另一个几何性质是**侧**的概念。对于曲面的每一个点，都可以找到该点处两个单位法向量，他们的分量分别差一个负号，对应于曲面的两侧。特别地，我们曲面积分的研究对象一般都是双侧曲面，当然也有形如莫比乌斯环是单侧曲面。直观上，我们会根据图形特点称各侧为内测、外侧、上侧、下侧等等，但是值得一提的是，但是数学上曲面的侧是由对应的法向量刻画的，你想到曲面的一侧时，请首先思考在每一点该侧对应什么样的法向量。

最后我们讨论根据曲线方程计算曲面法向量的方法，为了方便起见我们假设计算的都是单位法向量：

1.一般方程$z = g(x,y)$在点$(x_0, y_0, g(x_0,y_0))$处的法向量是

$$\pm \frac{1}{\sqrt{(g_x')^2 + (g_y')^2 + 1}} \left(g_x'(x_0,y_0), g_y'(x_0,y_0), -1\right). \tag{1}$$

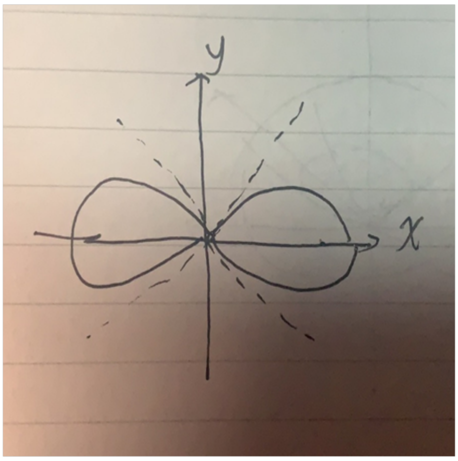

图 2: 例题1积分区域D示意图。

2.参数方程$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$ 在点$(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$处的法向量是

$$\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C), \tag{2}$$

其中

$$A = \left.\frac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)}\right|_{(u,v)=(u_0,v_0)}, B = \left.\frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)}\right|_{(u,v)=(u_0,v_0)}, C = \left.\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}\right|_{(u,v)=(u_0,v_0)}. \tag{3}$$

1.2 重积分在几何的应用

我们分两类题型来讲解。

面积和体积的计算

计算平面区域D的面积S，相当于计算区域D上以1为被积函数的二重积分

$$S = \iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4}$$

而这类问题的难度主要在平面区域的形状不容易刻画，我们看下面的例题：

例 1. 在平面上计算曲线$(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$所围闭区域的面积S。

分析：本题的曲线由复杂方程确定，可以通过极坐标换元的方法化简方程并画出图形，对图形足够了解后，就可以选择合适的方法计算积分。

Proof. 设曲线$(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$所围闭区域为D，写出要计算的二重积分

$$S = \iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5}$$

我们写出曲线的极坐标方程为$r^4 = r^2\cos 2\theta$，化简得到$r^2 = \cos 2\theta$。根据极坐标方程可以描点作图，即取$\theta = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}$等点算出$r$的取值连线作图，图形如图1.2。我们可以看到，曲线$r^2 = \cos 2\theta$中，自变量θ的取值范围不是$[0, 2\pi]$全部，而是部分$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4} 2\pi]$。

由于我们观察到图形D的对称性，我们只需要计算D在第一象限部分区域的面积D_0乘以4即可。在重积分几何问题时，请尽量通过对称性化简使得计算限制在第一象限或第一卦限，这样可以减小计算出错率。最后我们计算二重积分，我们采用极坐标换元的方法，我们假设D_0对应的(r, θ)平面区域为D_0'，对于给定$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$，自变量$r$的取值范围是$[0, \sqrt{\cos 2\theta}]$，由此

$$
\begin{aligned}
S &= 4\iint_{D_0} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 4\iint_{D_0'} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \mathrm{d}\theta = 1.
\end{aligned} \tag{6}
$$

我们指出，由于我们采用极坐标分析区域D，部分同学会误将D的面积写为$S = \iint_{D'} 1\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，取值$D'$是区域$D$在$(r, \theta)$平面的对应区域。然而这一点是不对的，因为只有当我们使用直角坐标方程时，面积S才等于区域上被积函数为1的二重积分。

□

计算空间区域Ω的体积V，相当于计算区域Ω上以1为被积函数的三重积分

$$
V = \iiint_{\Omega} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{7}
$$

由于三重积分计算的复杂性，我们也可以通过二重积分的方法计算体积：如图3左图所示，区域Ω在XoY平面的截面是D，对于给定$(x, y) \in D$，我们可以显然观察到z的取值范围$[z_1(x, y), z_2(x, y)]$，由此可以通过二重积分写出体积

$$
V = \iint_D (z_2(x, y) - z_1(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{8}
$$

从积分化累次积分的角度看，式(8)相当于把式(7)中的积分做了一步累次积分化简。一般来说，我建议使用公式(8)的二重积分来计算体积。

例 2. 空间中的*Viviani*体Ω是由单位球$x^2 + y^2 + z^2 \le 1$和圆柱$x^2 + y^2 \le x$相交形成的空间图形，求它的体积V。

分析：本题是较为标准的求体积问题，但是必须特别注意对称的使用以避免出错，

Proof. 空间Viviani体Ω在XoY平面投影$D_{(x,y)}$是以点$(\frac{1}{2}, 0)$为圆心$\frac{1}{2}$为半径的圆$x^2 + y^2 \le x$，而对于固定的x, y，z的范围是$[-\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \sqrt{1 - x^2 - y^2}]$。根据体积公式(8)，

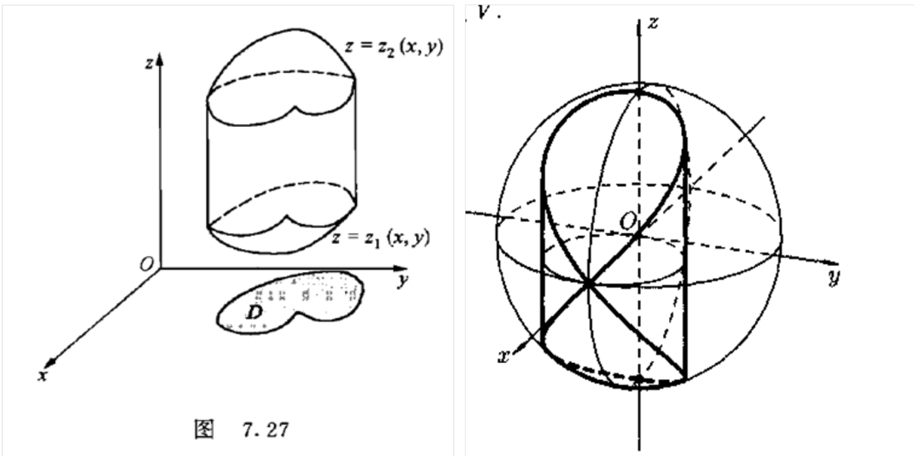

图 3: 左图：空间区域Ω的体积计算示意图；右图：例2积分区域Viviani体的示意图。

可以写出二重积分

$$V=\iint_{D_{(x,y)}}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-(-\sqrt{1-x^2-y^2})\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9}$$

根据对称性，Ω在$z\geq 0$和$z\leq 0$两部分的体积是完全对称的，此外由于截面$D_{(x,y)}$是圆，我们也可以看到Ω在$y\geq 0$和$y\leq 0$两部分也是完全对称的。所以，一个最不容易犯错的方法是只计算Ω在第一卦限（即$y,z\geq 0$）的体积然后乘以4。然而我们为了演示可能出错的情况，我们选择只将Ω关于$z=0$平面体积二等分计算

$$V=2\iint_{D_{(x,y)}}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{10}$$

接着对二重积分用极坐标变换，得到新的积分区域D'满足对于给定$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3}{2}\pi,2\pi]$，$r$的范围是$[0,\cos\theta]$：

$$\begin{aligned}V &= 2\iint_{D'}r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= 2\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3}{2}\pi,2\pi]}\left(\int_0^{\cos\theta}r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\\ &= 2\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3}{2}\pi,2\pi]}\left(-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3}{2}\pi,2\pi]}(1-|\sin\theta|^3)\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{11}$$

注意上面的绝对值，因为$\sqrt{1-\cos^2\theta}=|\sin\theta|$，所以$\left(1-\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}=|\sin\theta|^3$。但是如果$\theta\in[\frac{3}{2}\pi,2\pi]$时$\sin\theta\leq 0$，所以必须加入绝对值。但是容易发现两段定积分值相等，于是只算一段然后乘以2：

$$V=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-(\sin\theta)^3)\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}. \tag{12}$$

$\square$

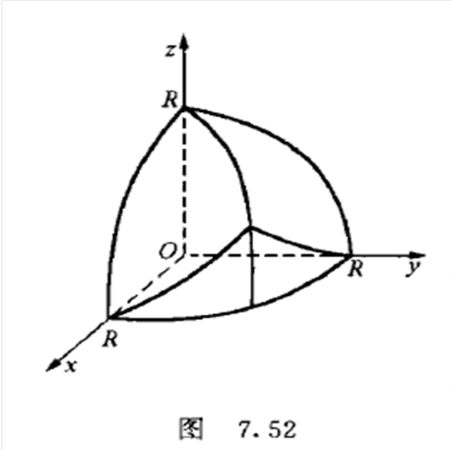

图 4: 例3立体Ω的示意图

曲面表面积的计算

表面积的计算是比较复杂的，我们需要首先确定曲面的方程。表面积计算的实质是计算了一个第一型曲面积分，因此我们在此先不详细解释表面积公式的推导，只是直观来说表面积公式的基本思路是将曲面划分为表面积微元，而表面积微元相较自变量平面XoY或UoV的面积微元差一个倍数。我们直接给出公式

1.曲面的一般方程$z = g(x, y)$，其中自变量取值范围$(x, y) \in D$，表面积公式

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{13}$$

其中被积函数$\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}$代表曲面的表面积微元较平面面积微元相差的比例。

2.曲面的参数方程$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$ 其中自变量取值范围$(u, v) \in D'$，表面积公式

$$S = \iint_{D'} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{D'} \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{14}$$

其中E, F, G要比Jacobi行列式A, B, C好算，且E, F, G也是关于u, v的函数，其关系式是

$$\begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{cases} \tag{15}$$

例 3. 求三个圆柱面$x^2 + y^2 = R^2$，$x^2 + z^2 = R^2$，$y^2 + z^2 = R^2$围成的立体Ω在第一卦限部分的表面积。（表面积不含三个坐标平面）

分析：如图4所示，本题的主要难点是确定曲面的方程以及自变量的取值范围，而图形本身的形状容易误导方程的计算，这时需要做题人必须保持冷静。

Proof. 我们假设Ω在第一卦限的曲面为S，那么S可以被分为表面积相等的三部分，这三部分分别是三个柱面$x^2+y^2=R^2$，$x^2+z^2=R^2$和$y^2+z^2=R^2$的一部分，三部分曲面的交点是$(\frac{\sqrt{2}R}{2},\frac{\sqrt{2}R}{2},\frac{\sqrt{2}R}{2})$。（这个交点的坐标不太符合几何直觉，容易误认为是$(\frac{\sqrt{3}R}{2},\frac{\sqrt{3}R}{3},\frac{\sqrt{3}R}{3})$）

我们只需计算S在柱面$x^2+z^2=1$的部分表面积，然后乘以3就得到S的全部表面积。我们首先写出柱面$x^2+z^2=1$的一般方程$z=\sqrt{R^2-x^2}$，自变量取值区域$(x,y)\in D$，其中D是柱面$x^2+z^2=1$在XoY平面上的投影，是以原点为圆心R为半径角度为$\frac{\pi}{4}$的扇形。这里需要注意，确定D是通过交点$(\frac{\sqrt{2}R}{2},\frac{\sqrt{2}R}{2},\frac{\sqrt{2}R}{2})$的坐标，并且交点$(\frac{\sqrt{2}R}{2},\frac{\sqrt{2}R}{2},\frac{\sqrt{2}R}{2})$于点$(1,0,0)$的连线是柱$x^2+y^2=1$和柱$x^2+z^2=1$的交线，这条交线必然垂直地投影到单位圆上。

据此写出表面积计算公式

$$S=3\iint_D\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3R\iint_D\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{16}$$

我们选择固定x积分y的顺序，当$x\in[0,\frac{\sqrt{2}R}{2}]$时$y\in[0,x]$，当$x\in[\frac{\sqrt{2}R}{2},R]$时$y\in[0,\sqrt{1-x^2}]$。这样计算看似分段复杂，但是另一种积分顺序面临的问题是被积函数$\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}$关于x的原函数过于复杂导致外层积分无法计算。

$$\begin{aligned}
S &= 3R\int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}}\left[\int_0^x\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x+3R\int_{\frac{\sqrt{2}R}{2}}^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\
&= 3R\int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}}\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x+3R\int_{\frac{\sqrt{2}R}{2}}^R 1\mathrm{d}x\\
&= 3R\left(-\sqrt{R^2-x^2}\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}}+3R^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=6R^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

□

1.3 重积分在物理的应用

理解重积分的物理应用，**首先要理解物理量的实际意义，然后是从“分”、”积“然后“取极限”三步理解物理量的计算公式。**我们即将看到，本节涉及的物理量计算公式都是通过微元法累积的思想得到的，这也是为什么物理量的计算常常等价于计算一个积分。

物体的质量

中学物理的基本认知是质量等于面积/体积乘以密度，而我们本节讨论的物体密度分布不均匀，故无法直接通过质量乘以密度的公式计算。我们考虑二维情形，设物体的

密度为$\rho(x,y)$，计算物体D质量的方法分为三步：

1.分 将物体D分为许多小块D_i。

2.积 每一个小块的面积是ΔS_i，小块足够小时可以假定小块密度均匀为$\rho(x_i,y_i)$，其中$(x_i,y_i)\in D_i$。由此D_i的质量为$\rho(x_i,y_i)\Delta S_i$，累积出D的总密度$\sum_i \rho(x_i,y_i)\Delta S_i$。

3.取极限 考虑小块的大小足够小，物体D的质量$M(D)$为

$$M(D)=\lim\sum_i \rho(x_i,y_i)\Delta S_i=\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{18}$$

从上述过程中可以看到，面积$M(D)$计算公式的推导思路实际与二重积分定义的三步相平行，都是“分”、“积”然后“取极限”。因此当我们在记忆物理公式时，也不应该死记硬背，可以同样采用“分”、“积”然后“取极限”三步理解物理公式的推导过程。

物体的质心

质心是几何图形中心概念的推广。考虑平面上的圆形，其圆心自然是圆的中心。加入将该圆形看作圆盘，每一个点都具有密度，由于圆盘的密度不均匀，所以圆心不一定是圆盘的质量中心。我们想刻画圆盘的质量中心的位置，就引进了质心的概念。质心是空间中的一个点（因此必须是有分量的坐标），它是物体在质量和位置（形状）两个层面的综合平均点。

我们考虑质心的计算公式。考虑二维情形，设物体D的密度为$\rho(x,y)$，质量是$M(D)$，计算物体D质心的方法分为三步：

1.分 将物体D分为许多小块D_i。

2.积 每一个小块的面积是ΔS_i，小块的位置为(x_i,y_i)，由此D_i的质量为$\rho(x_i,y_i)\Delta S_i$。综合D_i的质量和位置，D_i小块对质心的影响为x轴方向$x_i\rho(x_i,y_i)\Delta S_i$和$y$轴方向$y_i\rho(x_i,y_i)\Delta S_i$。将这些影响累积起来，得到$x$轴方向$\sum_i x_i\rho(x_i,y_i)\Delta S_i$和$y$轴方向$\sum_i y_i\rho(x_i,y_i)\Delta S_i$。

3.取极限 考虑小块的大小足够小，物体D的质心(x_0,y_0)的坐标为上述影响的累积除以物体的质量：

$$x_0=\frac{1}{M(D)}\lim\sum_i x_i\rho(x_i,y_i)\Delta S_i=\frac{1}{M(D)}\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{19}$$

和

$$y_0=\frac{1}{M(D)}\lim\sum_i y_i\rho(x_i,y_i)\Delta S_i=\frac{1}{M(D)}\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{20}$$

例 4. 第一卦限的立体Ω由四个面$z=0$，$y=1$，$x=y$和$z=xy$围成，密度函数$\rho(x,y,z)=1+2z$，求该立体的质心坐标。

分析：本题积分区域比较复杂，因此积分顺序的选择是值得注意的。要计算物体的质心，必须首先计算物体质量。

Proof. 首先分析立体Ω的形状，我们发现立体的至高点是$(1,1,1)$，Ω在XoY平面的截面是以$(0,0)$，$(0,1)$和$(1,1)$为顶点的等腰直角三角形$D_{(x,y)}$。本题积分的顺序选择有多种，我们均选择“先一后二”的积分顺序，先固定(x,y)对z积分：对给定的$(x,y)\in D_{(x,y)}$，z的取值范围是$[0,xy]$。这样做的好处的外层二重积分是规则图形二重积分，计算量不会溢出。

我们首先计算立体的质量：

$$\begin{aligned}
M(\Omega) &= \iiint_{\Omega}(1+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{(x,y)}}\left[\int_0^{xy}(1+2z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{D_{(x,y)}}\left(xy+x^2y^2\right)\mathrm{d}\mathrm{d}y = \int_0^1\left[\int_0^y\left(xy+x^2y^2\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1\left(\frac{y^3}{2}+\frac{y^5}{3}\right)\mathrm{d}y = \frac{13}{72}. \qquad (21)
\end{aligned}$$

利用相同的方法可以以此计算质心坐标的分量：x分量：

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{M(\Omega)}\iiint_{\Omega}x(1+2z)d\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{M(\Omega)}\iint_{D_{(x,y)}}\left[\int_0^{xy}x(1+2z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{M(\Omega)}\iint_{D_{(x,y)}}\left(x^2y+x^3y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{M(\Omega)}\int_0^1\left[\int_0^y\left(x^2y+x^3y^2\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{M(\Omega)}\int_0^1\left(\frac{y^4}{3}+\frac{y^6}{4}\right)\mathrm{d}y = \frac{258}{455}. \qquad (22)
\end{aligned}$$

y分量：

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{1}{M(\Omega)}\iiint_{\Omega}y(1+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{M(\Omega)}\iint_{D_{(x,y)}}\left[\int_0^{xy}y(1+2z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{M(\Omega)}\iint_{D_{(x,y)}}\left(xy^2+x^2y^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{M(\Omega)}\int_0^1\left[\int_0^y\left(xy^2+x^2y^3\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{M(\Omega)}\int_0^1\left(\frac{y^4}{2}+\frac{y^6}{3}\right)d\mathrm{d}y = \frac{372}{455}. \qquad (23)
\end{aligned}$$

z分量：

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{1}{M(\Omega)}\iiint_{\Omega}z(1+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{M(\Omega)}\iint_{D_{(x,y)}}\left[\int_0^{xy}z(1+2z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{M(\Omega)}\iint_{D_{(x,y)}}\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{2x^3y^3}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{M(\Omega)}\int_0^1\left[\int_0^y\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{2x^3y^3}{3}\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \frac{1}{M(\Omega)}\int_0^1\left(\frac{y^5}{6}+\frac{y^7}{6}\right)\mathrm{d}y = \frac{7}{26}.
\end{aligned}$$

结合上述计算，质心坐标$(\frac{258}{455},\frac{372}{455},\frac{7}{26})$。

□

物体的转动惯量

考虑三维空间中的物体Ω。如果Ω静止不动，Ω的“力量”（如重力）完全由质量刻画。如果Ω开始转动，那么Ω本身具有了速度，并且在Ω的各个点速度不同，离转轴越远的点具有更大的速度。物体Ω转动起来的“力量”，不仅由Ω本身的质量决定，也和Ω本身的转速有关。如果Ω转动得越快，Ω就有更强的冲击力。物理上，我们用转动惯量刻画物体旋转运动后冲击力的大小。

转动惯量的计算只考虑三维物体Ω，其密度$\rho(x,y,z)$。物体的转轴一般考虑三个坐标轴，我们给出转动惯量的计算公式，考虑转轴为x轴：

1.分 将物体Ω分为许多小块Ω_i。

2.积 每一个小块的体积是ΔV_i，小块的位置为(x_i,y_i,z_i)，由此V_i的质量为$\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$。我们知道$\Omega_i$的转速正比于$\Omega_i$到转轴的距离，而$(x_i,y_i,z_i)$到转轴$x$轴的距离为$\sqrt{y_i^2+z_i^2}$，而微元$\Omega_i$上转动惯量定义为质量乘以转轴距离的平方$\left(y_i^2+z_i^2\right)\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$。将转动惯量累积起来$\sum_i\left(y_i^2+z_i^2\right)\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$。

3.取极限 考虑小块的大小足够小，物体Ω关于x轴转动惯量$J_x(\Omega)$的计算公式是

$$J_x(\Omega)=\lim\sum_i\left(y_i^2+z_i^2\right)\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i=\iiint_\Omega(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{24}$$

我们很容易推出Ω关于另外两个坐标轴的转动惯量J_y和J_z的公式：

$$J_y=\iiint_\Omega\left(z^2+x^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,\quad J_z=\iiint_\Omega\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V. \tag{25}$$

此外，我们有时也会考虑物体Ω关于三个坐标平面的转动惯量，事实上三维物体并不能绕平面旋转，所以关于坐标平面的转动惯量并没有直接的物理意义。虽然如此，我们仍可以给出转动惯量的公式，即将物体微元到坐标轴的距离替换为到坐标平面的距离：

$$J_{xy}=\iiint_\Omega z^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V, \tag{26}$$

$$J_{yz}=\iiint_\Omega x^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V, \tag{27}$$

$$J_{zx}=\iiint_\Omega y^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V. \tag{28}$$

例 5. 设参数$a,b,c>0$，平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$与三个坐标平面所围三棱锥$\Omega$具有均匀密度$\rho$，求其关于三个坐标平面的转动惯量。

分析：本题是经典的转动惯量计算题，要注意对转动惯量物理量的理解。关于坐标轴的转动惯量积分都是只关于一个自变量的，所以可以选择“先二后一”顺序的计算积分。

Proof. 我们只就上哪Ω关于XoY平面的转动惯量

$$J_{xy} = \iiint_{\Omega} \rho z^2 \mathrm{d}z = \rho \iiint_{\Omega} z^2 \mathrm{d}z. \tag{29}$$

选择“先二后一”的积分顺序计算三重积分，对于给定$z \in [0, c]$，自变量(x, y)的取值范围$D^z_{(x,y)}$是直线$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \frac{z}{c}$与坐标轴交出的直角三角形，三角形的两边长为$a\left(1 - \frac{z}{c}\right)$和$b\left(1 - \frac{z}{c}\right)$。

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \rho \int_0^c z^2 \left[\iint_{D^z_{(x,y)}} 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}z \\ &= \rho \int_0^c \frac{ab}{2} z^2 \left(1 - \frac{z}{c}\right)^2 \mathrm{d}z = \frac{ab\rho}{2} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{6c} + \frac{z^5}{4c^2}\right)\Big|_0^c = \frac{abc^3\rho}{60}. \end{aligned} \tag{30}$$

根据对称性，另外两个转动惯量为$J_{yz} = \frac{a^3bc\rho}{60}$和$J_{zx} = \frac{ab^3c\rho}{60}$。

□