北京大学高等数学B习题课讲义函数极限

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后修改：2022.9

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。本讲义中，凡以x,y为自变量的极限均指函数极限，以n,m为变量的极限均指序列极限，请读者务必区分。

1 知识点整理

本讲义假定你已经熟悉函数极限的定义和各种计算方法。我们分两部分介绍连续函数，其一是在一个单点连续的函数，其二是在有界闭区间连续的函数。

1.1 单点连续

单点连续的定义

我们知道，定义函数极限$\lim_{x\to a} f(x)$需要$f(x)$在去心邻域$U_r^0(a)$定义，是不依赖$f(x)$在点$x=a$的函数值的。而我们讨论函数$f(x)$在点$x=a$处的连续性时，我们需要$f(x)$在$x=a$有定义，且$f(x)$在邻域$U_r(a)=(a-r,a+r)$定义。

函数连续性的标准定义是：

定义 1.1. 设$f(x)$在邻域$U_r(a)$定义，极限$\lim_{x\to a} f(x)$收敛且值等于$f(a)$，则称$f(x)$在点$x=a$连续。

我们对此有几点解释：

- 上述定义需要明确在哪一点$x=a$讨论，得出的连续性也是在$x=a$一点的连续性，。
- 由于极限$\lim_{x\to a} f(x)$表现$f(x)$在去心邻域$U_r^0(a)$的聚拢，点$x=a$处连续性说明$f(x)$在$x=a$附近处函数值与$f(a)$比较接近，这与函数图像的连续性等同。

为了加深对函数单点连续性的理解，我们研究下述三个重要函数

$$g_1(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ,x\neq 0,\\ 0 & ,x=0,\end{cases}\quad g_2(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ,x\neq 0,\\ 1 & ,x=0,\end{cases}\quad g_3(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ,x\neq 0,\\ 0 & ,x=0.\end{cases} \tag{1}$$

根据上一章的知识，我们有$\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$而$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$发散，将极限与$x=0$处函数值联系可以判别函数的连续性。显然$g_1(x)$在$x=0$处是连续的而$g_2(x)$在$x=0$处是发散的，因为$g_1(0)=0$而$g_2(0)\neq 0$；如果考虑函数$y=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$的图像（见函数图像讲义图1），函数$g_1(x)$在$x=0$函数值位于图像之上，而函数$g_2(x)$在$x=0$处函数值偏离在图像以外；另一方面，$g_3(x)$在$x=0$处也是发散的，因为极限$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$是发散的，因此函数$y=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$的图像在$x=0$附近震荡而非聚拢，得到的函数$g_1(x)$自然不是连续的图形。

判别函数单点连续性的本质是计算极限，我们有下面的例题

例 1. 判断下面两个函数函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{x} & ,x\neq 0,\\ 1 & ,x=0,\end{cases}\quad g(x)=[x]+[-x], \tag{2}$$

在$x=0$处是否连续。

分析：判断单点连续性的本质是极限0处极限是否收敛且等于0处函数值。

Proof. 首先用等价无穷小方法计算极限

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=f(0), \tag{3}$$

由此$f(x)$在$x=0$处连续。

接下来，由高斯取整函数是分段函数，我们分左右极限计算

$$\lim_{x\to 0+0}[x]=0,\ \lim_{x\to 0+0}[-x]=-1, \tag{4}$$

以及

$$\lim_{x\to 0-0}[x]=-1,\ \lim_{x\to 0-0}[-x]=0, \tag{5}$$

由此

$$\lim_{x\to 0+0}\left([x]+[-x]\right)=-1=\lim_{x\to 0-0}\left([x]+[-x]\right), \tag{6}$$

所以极限

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\left([x]+[-x]\right)=-1. \tag{7}$$

结合$g(0)=0$知$g(x)$在$x=0$不连续。 □

单点连续的性质

首先，依据定义可以证明五类基本初等函数都在定义域上的各个点连续，并且连续函数通过四则运算和复合运算得到的函数依然连续。这些结论的证明都可以通过函数极限的相关性质得到。

假定函数$f(x)$和$g(x)$都在邻域$U_r(a)$定义且在$x=a$连续，那么在邻域$U_r(a)$上定义的函数$f(x)\pm g(x), f(x)\cdot g(x)$连续；如果$g(a)\neq 0$，我们可以在邻域定义函数$\frac{f(x)}{g(x)}$，此函数也在$x=a$连续。此外我们还可以证明，如果$f(x)$在$x=a$连续，那么$|f(x)|$在$x=a$连续，读者可以自行补充证明。

假定函数$f(x)$在邻域$U_r(a)$定义且连续，函数$g(x)$在邻域$U_t(f(a))$定义且连续，那么我们可以证明复合函数$g(f(x))$在$x=a$连续。

利用上述方法，我们可以组合基本初等函数，得出大量在定义域各个点都连续的函数。

间断点的分类

由于大多数常用函数都在定义域上绝大多数点连续，我们会格外关注函数的不连续点，也称**间断点**。设$f(x)$在邻域$U_r(a)$定义。从逻辑上来说，点$x=a$成为$f(x)$的间断点有下述三种可能：

1.可去间断点 极限$\lim_{x\to a} f(x)$收敛于l但是值$l\neq f(a)$，例如前例中的函数$g_2(x)$就是此类。如果$x=a$是可去间断点，我们可以将$f(x)$在$x=a$的函数值更改到l，就可以使得$f(x)$在$x=a$连续，这是“可去”一词的来源。

2.跳跃间断点 极限$\lim_{x\to a} f(x)$发散，但是两个单侧极限$\lim_{x\to a-0} f(x)$和$\lim_{x\to a+0} f(x)$都存在但是相等。例如函数$f(x)=[x]$在$x=0$就存在不相等的两个单侧极限，因此$x=0$是$f(x)=[x]$的跳跃间断点，其图像在$x=0$左右两端产生“错位”，导致了间断。

3.第二类间断点 极限$\lim_{x\to a} f(x)$发散，并且两个单侧极限$\lim_{x\to a-0} f(x)$或$\lim_{x\to a+0} f(x)$至少之一不存在的，例如前例中的函数$g_3(x)$就是此类。如果$x=a$是$f(x)$的第二类间断点，那么$f(x)$在$x=a$附近常常高频震荡，这类间断点的间断性质与函数值$f(a)$无关，是十分本质的发散。

在上述分析中可以看到，跳跃间断点和第二类间断点都蕴含着极限$\lim_{x\to a} f(x)$发散，但是两者蕴含着函数极限发散方式：单侧极限存在但不同和本质震荡的发散。

这里我们指出间断点的一种特殊情况：上述分析均假设$f(x)$在$U_r(a)$有定义，实际上如果$f(x)$在去心邻域$U_r^0(a)$有定义在$x=a$无定义，我们也可以讨论其间断点性质，因为间断的分类依赖是是$x\to a$的函数极限性质，而函数极限的性质和$x=a$处是否有定义

无关。例如我们考虑函数$h(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$，与前例中$g_1$和$g_2$不同，函数$h(x)$在$x=0$处并无定义，但是由于极限$\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$得出$x=0$是$h(x)$的可去间断点。从图像上看，$h(x)$在点$(0,0)$处无定义形成空心点，使得$h(x)$在$x=0$间断。

寻找给定函数的间断点并判断类型是一类非常常见的题目。这类题目给出的函数通常在大多数点都可以显见连续，我们只需要讨论特殊的点处的连续性，对于间断点通过计算函数极限的方法判别类型。特别地。没有定义的孤立点也可以算作间断点。

例 2. 求下列函数在$\mathbb{R}$上的各个间断点并判断类型
1.$\frac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$。
2.$[|\cos x|]$。

分析：本题是找出函数间断点并分类的题目。由于这两个函数形式上接近基本初等函数的四则运算，因此它们在大多数点都连续，我们只要找出那些“疑似”不连续的点，并通过计算单侧极限判断其是否为间断点以及间断点类型即可。

Proof. **1.**设$f(x)=\frac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$，那么$f(x)$在点$\pm1$和$0$以外均有定义且连续，我们只要考虑$f(x)$在点$\pm1$和$0$的间断点类型即可。首先考虑$x=1$的情况，计算极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{|x|\,(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}, \tag{8}$$

由此$x=1$为可去间断点。接着考虑$x=-1$的情况，计算极限

$$\lim_{x\to -1}\frac{x(x-1)}{|x|\,(x^2-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x-1)}{-x(x^2-1)}=\lim_{x\to -1+0}-\frac{1}{x+1}=\infty, \tag{9}$$

由此$x=-1$为第二类间断点（注：函数极限广义收敛为无穷属于发散的一类）。最后考虑$x=0$的情况，继续计算极限

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{x(x-1)}{|x|\,(x^2-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x+1}=1, \tag{10}$$

和

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{x(x-1)}{|x|\,(x^2-1)}==\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{-x(x^2-1)}=\lim_{x\to -1+0}-\frac{1}{x+1}=-1, \tag{11}$$

由此$x=0$的跳跃间断点。综上函数有$1,0,-1$三个间断点，分别为可去间断点，跳跃间断点和第二类间断点。

2.设$f(x)=[|\cos x|]$，我们发现由于$|\cos x|\in[0,1]$，因此除非$\cos x=\pm1$时$f(x)=1$，其余情况$f(x)=0$。由此，只有当$|\cos x|=1$时可能产生间断，此时$x=k\pi$，其中$k\in\mathbb{Z}$。我们计算极限

$$\lim_{x\to k\pi}[|\cos x|]=0\neq f(k\pi)=1, \tag{12}$$

因此$k\pi$为可去间断点。

□

连续性的序列化定义

假设$f(x)$在$x=a$连续，有点列$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$满足$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，根据归结定理

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right). \tag{13}$$

式(13)可以直观的理解为，在连续性的保证下极限运算$\lim_{n\to\infty}$和函数运算f的顺序是可以更换的。例如，函数e^x在$\mathbb{R}$每一点连续，如果点列$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$收敛，就可以得到

$$\exp\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{x_n}, \tag{14}$$

这一结论是序列极限运算题的经典结论，确保了e的方法的可行性。

如果将归结定理的充分条件和必要条件总结到一起，可以得到下述结论：

定理 1.1. 设$f(x)$在$U_r(a)$有定义，那么$f(x)$在点$x=a$连续的充分必要条件，是对任意序列$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset U_r(a)$，如果$\lim_{n\to\infty} x_n = a$就蕴含$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$。

在一些题目中，将函数的连续性通过上述定理转化从序列的收敛性，是比直接使用函数极限的性质或定义更加有用的。

例 3. ***2020*年高等数学*A*期中考试题.** 设$f(x)$为$(0,+\infty)$上定义，在定义域的各个点连续，且$f(x^2)=f(x)$对一切x成立，设$f(2021)=1$，求$f(2022)$。

分析：本题的难点在于如何使用条件$f(x)$连续，为此我们使用了序列化的连续函数定义。

Proof. 根据题设有

$$1 = f(2021) = f\left(\sqrt{2021}\right) = f\left(\sqrt[4]{2021}\right) = \cdots \tag{15}$$

由此对于一切$n\in\mathbb{N}^*$有$f\left(2021^{2^{-n}}\right) = f(2021) = 1$。设$y_n = 2021^{2^{-n}}$，显然$\lim_{n\to\infty} y_n = 1$。根据序列化的连续函数的定义有$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(1)$，由此$f(1)=1$。

接下来再设$z_n = 2022^{2^{-n}}$，同理也有$f(z_n)=f(2022)$对一切$n\in\mathbb{N}^*$成立，此外我们还有$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(1)$，因此$f(2022)=f(1)=1$。 □

1.2 有界闭区间连续函数的性质

连续性是逐点定义的。如果一个函数$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$的每一个点都连续（在端点$x=a,b$由于一侧无定义，只需单侧连续），称为$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$连续，记为$f(x)\in C[a,b]$。类似地，我们也可以在开区间、无穷区间上定义区间整体的连续性，记为$f(x)\in C(a,b)$等。

区间整体的连续性具有很好的几何性质，即“函数图像连在一起”，这种特性可以用有界闭区间连续函数的三条性质来刻画。

定理 1.2. 设$f(x) \in C[a,b]$，那么
***1.*有界性** $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数。
***2.*极值可达性质** $f(x)$在$[a,b]$上存在最大值M和最小值m，即存在$x_1, x_2 \in [a,b]$使得$m = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = M$对一切$x \in [a,b]$成立。
***3.*介值性** 如果实数η介于$f(a)$与$f(b)$之间，即$f(a) < \eta < f(b)$或$f(b) < \eta < f(a)$成立，那么存在$x_0 \in (a,b)$使得$f(x_0) = \eta$。

关于上述定理我们指出几点

- 我们指出上述几个性质只对有限闭区间$[a,b]$的连续函数成立，开区间或无穷区间的连续函数不一定具有有界性，例如在$(0,1)$上无界的函数$y = \frac{1}{x}$。在补充题中，我们也给出了在开区间上讨论函数有界性的方法。在严格数学理论中，连续函数的有界性等性质依赖定义域集合的紧性，有界闭区间便是紧集合。

- 有界闭区间连续函数的几个性质的证明需要利用实数集的完备性，即“实数盖满整个数轴”这一直观事实。例如考虑介值定理，如果$f(x) \in C[a,b]$，满足$f(a) > 0$和$f(b) < 0$，从图像上看$f(x)$的图像如果是“连贯”的就必须在某一刻穿过$y = 0$。然而加入实数不具有完备性，那么$f(x)$穿越$y = 0$的零点有可能不在实数范围内，这是违反直觉的。因此，连续函数的介值定理也是实数完备性的一种体现。

有界闭区间的连续函数的几个性质常常在证明题中使用，其中介值定理通常在存在性问题或者方程解存在性的讨论使用。我们来看下面三个最典型的例题：

例 4. 证明方程$x = \tan x$存在无穷多个实解。

分析：这是利用介值性讨论方程解存在性的典型问题，这类问题的解法是构造给定的函数然后用介值定理讨论函数的零点。从函数图像来看，由于$y = \tan x$在每个周期$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$都从$-\infty$走向$+\infty$，因此$y = \tan x$应在每个周期里均和$y = x$产生一个交点，由此方程$x = \tan x$理应存在无穷多个实解。利用函数极限的相关理论，可以严格化上述论述。

Proof. 定义函数$f(x) = x - \tan x$，对一切$k \in \mathbb{Z}$有

$$\lim_{x \to \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)+0} (x - \tan x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)-0} (x - \tan x) = +\infty \tag{16}$$

根据函数极限的局部有界性，存在足够接近点$k\pi-\frac{\pi}{2}$的点$x_1 \in \left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$使得$f(x_1)<0$；同理，存在足够接近点$k\pi+\frac{\pi}{2}$的点$x_2 \in \left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$使得$f(x_2)>0$；同时有$x_1<x_2$。由于$f(x)$是定义域上的连续函数，特别地$f(x)\in C[x_1,x_2]$且$f(x_1)<0<f(x_2)$，所以存在$\xi\in(x_1,x_2)$使得$f(\xi)=0$。因此$\xi$是$f(x)$在区间$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$的一个零点。由于对每个$k\in\mathbb{Z}$都可以找到一个这样的零点，所以$x-\tan x=0$存在无穷多个解。 □

例 5. ***2020年高等数学B期中考试题***. 设函数$f(x)\in C[0,1]$，满足$f(0)=f(1)$，求证存在$\alpha,\beta\in[0,1]$满足$\beta-\alpha=\frac{1}{2}$且$f(\alpha)=f(\beta)$。

分析：本题是连续函数相关的存在性问题，这类问题通常使用介值定理解答，使用介值定理的关键是构造一个连续的函数$F(x)$，并通过$F(x)$的介值性质得到需要的存在性结果。本题目标结论是$f\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=f(\alpha)$很难直接通过$f$的介值性得到，我们转而构造新的函数$F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$并使用$F(x)$介值性证明结论。

Proof. 定义函数$F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$是$[0,\frac{1}{2}]$上的连续函数，由于$f(0)=f(1)$我们有$F(0)+F(\frac{1}{2})=f(1)-f(0)=0$我们分为两种情况：
1.如果$F(0)=F(\frac{1}{2})=0$，由此$f(0)=f(\frac{1}{2})=f(1)$，取$\alpha=0$和$\beta=\frac{1}{2}$符合题目要求。
2.如果$F(0)$和$F(\frac{1}{2})$都不是0，不妨$F(0)>0$而$F(\frac{1}{2})<0$，由介值定理存在$\alpha\in(0,\frac{1}{2})$使得$F(\alpha)=0$，由此$f(\alpha+\frac{1}{2})=f(\alpha)$，取$\beta=\alpha+\frac{1}{2}$满足题设。 □

例 6. 设$f(x)\in C[1,+\infty)$，如果极限$\lim_{x\to+\infty}f(x)$收敛，证明$f(x)$在$[1,+\infty)$上是有界函数。

分析：在无穷区间$[1,+\infty)$本身并不一定具有有界性，我们将借用$\lim_{x\to+\infty}f(x)$收敛的结论得出结果，其思路是在无穷区间$[1,+\infty)$分离出一个有界闭区间使用连续函数的有界性。值得一提的是，很多同学在使用闭区间连续函数的性质时，比较熟悉介值定理而忘记了有界性和极值性质。

Proof. 设$\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$，其中l是实数。借助收敛的定义和局部有界性，存在实数$X>1$使得$|f(x)-l|<1$对一切$x>X$成立，由此$f(x)$在无限区间$(X,+\infty)$是有界函数：具有上界$l+1$和下界$l-1$；另一方面，由于$f(x)\in C[1,X]$，所以$f(x)$在有界闭区间$[1,X]$是有界函数。

由此我们就在$f(x)$在两个区间$[1,X]$和$(X,+\infty)$都有界，而区间$[1,X]$和$(X,+\infty)$组合在一起形成区间$[1,+\infty)$，因此$f(x)$在区间$[1,+\infty)$的上界就是区间$[1,X]$和$(X,+\infty)$上界的较大者（下界同理），于是$f(x)$在$[1,+\infty)$上是有界函数。

值得一提的是，我们在使用极限的定义时取$|f(x)-l|<1$，这里参数1的选取可以改为任意正实数。 □

2　扩展延伸

2.1　扩展题概览

扩展延伸题部分难度较大，建议根据题目内容选择性阅读。

- 扩展习题1：困难难度，狄利克雷函数和黎曼函数的连续性。
- 扩展习题2：中等难度，病态函数的构造和理解。
- 扩展习题3：困难难度，压缩映射和不动点的相关性质。
- 扩展习题4：困难难度，压缩映射性质的应用。
- 扩展补充题1：简单难度，间断点的判别和分类。
- 扩展补充题2：中等难度，连续函数最值定理证明题。
- 扩展补充题3：中等难度，连续函数介值定理讨论方程的根。
- 扩展补充题4：中等难度，单点连续性定义理解。

2.2　扩展习题

题 1. 求下列函数在$(0,1)$上的各个间断点并判断类型

1.狄利克雷函数$D(x)=\begin{cases}1 & , \quad x\in\mathbb{Q}, \\ 0 & , \quad x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$。

2.黎曼函数$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & , \quad x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}, \\ 0 & , \quad x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$。

分析：狄利克雷函数和黎曼函数是高等数学中重要的病态函数，它们的存在大大促进了高等数学的严格化。上述两个分析都用的实数的稠密性。其中黎曼函数连续性分析比较难，不作为高等数学课程要求。

Proof. **1.**我们将证明$D(x)$在$(0,1)$的任一点都不连续。

取$r\in(0,1)$，对于$\forall n\in\mathbb{N}^*$，根据实数的稠密性，存在有理数$r_n\in\big(r-n^{-1},r\big)$和无理数$y_n\in\big(r-n^{-1},r\big)$。根据夹逼原理有$\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}y_n=r$。另一方面，根据定义$D(r_n)=1$且$D(y_n)=0$，因此$\lim_{n\to\infty}D(r_n)=1$而$\lim_{n\to\infty}D(y_n)=0$。根据归结定理，左极限$\lim_{x\to r-0}D(x)$不存在（因为如果极限存在，那么两个序列极

限$\lim_{n\to\infty} D(r_n)$和$\lim_{n\to\infty} D(y_n)$必须收敛到相同的值）。同理右极限$\lim_{x\to r+0} D(x)$不存在。因此任意$r\in(0,1)$为第二类间断点。

2.我们将证明$R(x)$在有理数点不连续，在无理数点连续。我们首先证明$\lim_{x\to r} f(x)=0$对一切$r\in(0,1)$成立，这一结论从黎曼函数的分段形式来看是并不显然的。

用$\varepsilon-\delta$语言，对一切$\varepsilon>0$，我们希望找到一个足够小的$\delta>0$使得$f(x)<\varepsilon$对$x\in U_\delta^0(r)$成立。假定$\varepsilon>0$是确定的，那么存在足够大的自然数$n\in\mathbb{N}^*$使得$n>\frac{1}{\varepsilon}$，考虑集合$A=\left\{y=\frac{p}{q}\in(0,1)\mid q\le n\right\}$，那么$A$是一个元素个数有限的有理数集，并且对于一切$x\in(0,1)/A$有$f(x)<\frac{1}{n}<\varepsilon$，这是因为所有分母不大于$n$的有理数都在集合$A$里。由于$A$是有限集，我们取

$$d=\min_{y\in A, y\neq r}|y-r|>0, \tag{17}$$

即取A中所有有理数中与r距离最近者的距离。最后，我们将与ε对应的δ取为$\delta=\frac{d}{2}>0$，由此$U_\delta^0(r)\cap A=\emptyset$，因此对一切$x\in U_\delta^0(r)$有$f(x)<\varepsilon$，命题得证。

借助$\lim_{x\to r} f(x)=0$对一切$r\in(0,1)$成立，我们显然有一切有理数点都是可去间断点，一切无理数点都是连续点。 □

题 2. 回答下列问题

1.是否存在一个在全体实数定义的函数，其有且仅有一个连续点，其余各点都是间断点？

2.是否存在一个在全体实数定义的函数，它在每一个点都不连续，且有且仅有一点的极限是存在的，其余各点极限皆不存在？

分析：本题展示了两个非常特殊的函数，其构造方法是基于病态的狄利克雷函数。由于狄利克雷函数在任何一个点都不连续且是第二类间断点，所以我们很容易在狄利克雷函数的基础上构造在大多数点都不连续且极限不存在的函数。

Proof. **1.**存在，构造函数$f(x)=xD(x)$，其中$D(x)$是狄利克雷函数。由于$D(x)$只取值0或1，由此可以证明$\lim_{x\to 0} xD(x)=0=f(0)$，所以$x=0$是$f(x)$一个连续点。对于其他点$r\neq 0$，我们都可以模仿证狄利克雷函数的单侧极限$\lim_{x\to r+0} D(x)$和$\lim_{x\to r-0} D(x)$的方法不存在的方法，证明$f(x)$的单侧极限也不存在，由此可知$f(x)$在$x=0$以外的每一个都不连续，是第二类间断点。

2.存在，我们修改**1**中函数为

$$g(x)=\begin{cases} xD(x) & , \quad x\neq 0, \\ 1 & , \quad x=0. \end{cases} \tag{18}$$

即在**1**中函数基础上将0处函数值由0改为了1。如此得到的函数在$x\neq 0$依然都是第二类间断点，在$x=0$处极限存在，但是是可去间断点。 □

题 3. 设函数$f(x)$是在$\mathbb{R}$定义的函数，且存在$k \in (0,1)$使得

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

证明下列结论

1.$f(x)$是$\mathbb{R}$上的连续函数。

2.函数$kx - f(x)$是单调递增的。

3.存在$c \in \mathbb{R}$使得$c = f(c)$。

分析：数学上我们称满足式(19)的函数为**压缩映射**，直观来看在f的映射下像$f(x)$和$f(y)$的距离变得更近了，因此像集相较定义域被“压缩”了。本题主要总结了压缩映射具有的三类性质：连续性，单调性和不动点的存在性，这些解法在解题中非常实用。其中**不动点**指满足$c = f(c)$的点，在f的映射下像和原像同为c。

Proof. **1.**我们要证明$f(x)$在$x = a$连续，其中$x = a$是任意实数，即需要证明

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \forall a \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

对于给定a，我们利用式(19)得

$$0 \leq |f(x) - f(a)| \leq |x - a|. \tag{21}$$

在上述不等式取$x \to a$并使用夹逼原理得$\lim_{x \to a} |f(x) - f(a)| = 0$，这与$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$等价，由此$f(x)$在任一点连续。

2.在式(19)取$x < y$并展开绝对值

$$k(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq k(y - x). \tag{22}$$

将左侧不等号移项

$$kx - f(x) \leq ky - f(y), \forall x < y. \tag{23}$$

由此函数$kx - f(x)$是单调递增的。

在不等式(22)的基础上可以继续化简为

$$f(x) - k(y - x) \leq f(y) \leq f(x) + k(y - x). \tag{24}$$

我们固定x而降y看作自变量，那么$g_1(y) = f(x) + k(y - x)$和$g_2(y) = f(x) - k(y - x)$分别代表经过点$(x, f(x))$的斜率为k和$-k$的直线，因此函数$f(x)$在点$(x, f(x))$附近的演化被斜率为k和$-k$的两条直线控制住，压缩映射的本质便是f的变化率受到限制。

3.为了找到不动点，我们研究函数$g(x) = x - f(x)$的性质。首先利用函数$kx - f(x)$的单调性，任取$y > x$有

$$g(y) = y - f(y) = (1-k)y + ky - f(y) > (1-k)y + kx - f(x) = (1-k)(y-x) + g(x), \tag{25}$$

移项得

$$g(y)-g(x)>(1-k)(y-x), \tag{26}$$

由此$g(x)$不仅是严格单调递增函数，其增长率至少是$1-k$。

任取$p\in\mathbb{R}$，如果$g(p)=0$则命题直接得证；$g(p)\neq 0$时，不妨设$g(p)<0$，我们还需要找到一个函数值为正的点。利用g的增长率不小于$1-k$的结论，取

$$q=p+\frac{-2g(p)}{1-k}>p, \tag{27}$$

由此

$$g(q)>g(p)+(1-k)\cdot\frac{-2g(p)}{1-k}=-g(p)>0. \tag{28}$$

由此我们找到了$g(p)<0<g(q)$，利用g在$[p,q]$的连续性，存在$c\in[p,q]$使得$g(c)=0$，即$c=f(c)$。 $\square$

题 4. ***2020*年高等数学*B*期中考试题.** 设函数$f(x)$定义域为$[a,b]$，且像集$f([a,b])\subset[a,b]$，并且满足$|f(p)-f(q)|\leq|p-q|$对一切$p,q\in[a,b]$成立。任取$x_0\in[a,b]$，递推定义序列$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$，那么序列$\{x_n\}$是收敛的。

分析：本题是压缩映射的一个变种结论，要证明递推序列$\{x_n\}$收敛，我们的思路则是尝试证明$\{x_n\}$单调，并使用单调收敛原理。为了证明单调收敛原理，我们首先要证明f连续、$x-f(x)$单调和不动点存在这三个关于压缩映射的经典结论。

Proof. 我们分别证明下面几个结论。定义辅助函数$g(x)=x-f(x)$。

1.$f(x)$是连续函数，证明方法和上一题第一问完全相同。所以$g(x)\in C[a,b]$。

2.存在不动点$c\in[a,b]$使得$c=f(c)$，亦即$g(c)=0$。相较于$\mathbb{R}$上结论，这里不动点存在性的证明比较简单。由于像集$f([a,b])\subset[a,b]$，所以$f(a)\geq a$而$f(b)\leq b$，所以$g(a)<0$而$g(b)>0$。根据介值定理，存在$c\in[a,b]$使得$g(c)=0$，由此$c=f(c)$。

3.$g(x)$是单调递增的函数。对于$a\leq p<q\leq b$，根据题设有

$$p-q\leq f(q)-f(p)\leq q-p, \tag{29}$$

所以

$$g(p)\geq g(q),\forall q>p, \tag{30}$$

这说明$g(x)$是一个单调递增的函数。

4.最后我们分析题目的序列$\{x_n\}$的单调性。假如起始点x_0是函数$g(x)$的零点，即$x_0=f(x_0)$，根据递推式序列$\{x_n\}$是常数列，因此我们只考虑x_0不是函数$g(x)$零点的情形。此时由于g是一个单调递增的函数，并且具有零点c，我们可以将x_0的取值分为两

种情况：

情况1. $x_0 < c$且$g(x_0) < 0$，亦即$x_0 < f(x_0)$。

情况2. $x_0 > c$且$g(x_0) > 0$，亦即$x_0 > f(x_0)$。

这两种情况的证明方法实际是一致的，我们只考虑**情况1**。由于$f(x_0) > x_0$，我们显然有$x_1 = \frac{f(x_0)+x_0}{2} > x_0$。我们接下来证明$x_1 \le c$。由于$c = f(c)$，根据题目要求有

$$x_0 - c \le c - f(x_0) \le c - x_0. \tag{31}$$

那么移项得

$$c \ge \frac{f(x_0) + x_0}{2} = x_1. \tag{32}$$

只要说明了$x_1 \le c$，那么必然有$g(x_1) < 0$或$g(x_1) = 0$。如果$g(x_1) = 0$，那么依然得到$\{x_n\}$是常数列；如果$g(x_1) < 0$，那么$f(x_1) \le x_1$，就能进一步再推出$x_2 > x_1$。如果这样的推理成立，我们必然可以推断，当$x_0 < y$时，序列$\{x_n\}$的每一项都是递增的，即$x_0 \le x_1 \le x_2 \cdots \le y$，因此序列$\{x_n\}$单调递增，则收敛。

□

2.3 扩展补充题

补 1. 定义两个函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,x > 0, \\ 0 & ,x = 0, \\ -1 & ,x < 0 \end{cases} \quad g(x) = x - [x]. \tag{33}$$

请找出$f(x), g(x), f(g(x)), g(f(x))$所有间断点并判断类型。

补 2. 设$f(x) \in C(a,b)$并且$\lim_{x\to a+0} f(x)$和$\lim_{x\to b-0} f(x)$收敛，证明$f(x)$在(a,b)为有界函数。

补 3. 设$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$是多项式函数，证明下列命题：

1.如果n是奇数，那么$P(x)$存在实零点。

2.如果n是偶数且$a_0 < 0$，那么$P(x)$至少存在两个实零点。

补 4. 设函数$f(x)$在邻域$U_r(a)$定义，对一切$0 < \delta < a$，定义$f(x)$在$U_\delta(a)$的振幅

$$\omega(a,\delta) = \max_{x\in U_\delta(a)} f(x) - \min_{x\in U_\delta(a)} f(x). \tag{34}$$

证明$f(x)$在$x = a$连续的充分必要条件是$\lim_{\delta\to 0+0} \omega(a,\delta) = 0$。