北京大学高等数学B习题课讲义：解析几何

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后修改：2022.11

1 知识点理解

本章大致可以分为两部分：向量代数和解析几何。向量代数主要研究向量的各种运算，特别强调使用坐标等代数方法研究向量；解析几何则采用向量代数方法研究几何图形，故称为“解析”几何，其中向量会作为解析几何研究中的主要媒介。本章知识是下册高维积分的基础，请务必认真学习。特别地，如不加说明，本章所有几何图形均在三维空间讨论。

1.1 向量代数

向量的特点是既有“大小”又有“方向”，因此讨论向量时必须讨论大小和方向这两个要素。给定空间两点A,B，一个线段连接A到B，就得到了向量$\overrightarrow{AB}$，其中向量的大小指线段AB的长度，向量的方向值自起点A向终点B的方向，当我们谈论向量$\overrightarrow{AB}$自然就蕴含这两个信息。但是由于我们讨论的是**自由向量**，即只要确定了向量的**长度**和**方向**就可以确定一个向量，而不关心向量的起点，因此我们一般假设向量的起点是三维空间的原点。特别地，零向量长度为零，但是方向可以是任意方向。如果想证明两个向量相同，就需要证明其长度和方向都一样。

在表达向量时，我们一般有两种表示方法：

1直接表示法. 如通过$\mathbf{a}$或$\overrightarrow{AB}$这样的符号表征向量。本讲义中的粗体小写英文字母均代表向量。

2坐标表示法. 在空间直角坐标系上，我们用坐标(x,y,z)表示以原点为起点以点(x,y,z)为终点的向量。这里(x,y,z)既可以表示坐标系中的一个点，也可以表示一个向量。如果定义直角坐标系三个坐标轴的单位向量

$$\mathbf{i}=(1,0,0),\mathbf{j}=(0,1,0),\mathbf{k}=(0,0,1), \tag{1}$$

那么

$$(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}, \tag{2}$$

实际代表了对向量(x,y,z)在三个坐标轴方向的**正交分解**。

向量也可以进行运算，一些向量运算得到新向量，也有一些向量运算得到数值。下面我们通过直接表示法和坐标表示法分别讨论向量的各种运算

1.计算长度. 给定向量$\mathbf{a}$，其长度写作$|\mathbf{a}|$是一个数值。在坐标表示的意义下有

$$|(x,y,z)|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{3}$$

长度$|\mathbf{a}|=1$的向量称为**单位向量**。

2.加法运算. 向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的加法依照**平行四边形法则**得到一个新的向量，向量$\mathbf{a}+\mathbf{b}$的长度并非是向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$长度的简单加法，但是依照**三角不等式**我们有

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|. \tag{4}$$

在坐标表示的意义下有

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2). \tag{5}$$

3.数乘运算. 向量$\mathbf{a}$乘上一个实数k，得到的新向量与原向量共线，长度则变为$|k|$倍：如果$k>0$向量$k\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$**反向**；如果$k<0$向量$k\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$**异向**；如果$k=0$向量$k\mathbf{a}$为零向量；值得指出的是，同向和反向的向量统称**共线**或**平行**向量，而规定零向量与任意向量都平行。在坐标表示的意义下有

$$k(x,y,z)=(kx,ky,kz). \tag{6}$$

通过数乘运算可以对非零向量$\mathbf{a}$做**单位化**$\mathbf{b}=\pm\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$，得到的**两个**单位化向量长度为1。

4.内积运算. 两个向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$做内积得到一个数值

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle, \tag{7}$$

其中左侧的$\cdot$是内积符号，因此内积也叫**点乘**，右侧的$\cdot$则是数值乘法，学习向量代数的过程需要额外区分不同行文背景下$\cdot$的含义；$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$代表向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$**夹角**的大小，夹角的大小默认为$[0,\pi]$之间；在坐标表示的意义下有无需计算夹角就可以得到内积

$$(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, \tag{8}$$

因此有时会通过坐标计算内积的方法来反推夹角的值。一个值得注意的事实是$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$。内积引入是为了刻画力的做功等物理现象。

5.外积运算. 两个向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$做内积得到一个新向量$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，其长度满足

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\ge 0, \tag{9}$$

外积向量与两个向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$都垂直，但是与向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$都垂直的向量有两个，因此外积的具体方向则由**右手定则**决定。在坐标表示的意义下也可以计算外积

$$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right). \tag{10}$$

一个值得注意的事实是$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$。外积的引入是为了刻画磁通量等物理现象。

向量的位置关系是研究解析几何的基础，我们着重关注向量的两种位置关系：**平行**和**垂直**。如果两个向量$\mathbf{a}=(x_1,y_1,z_1)$和$\mathbf{b}=(x_2,y_2,z_2)$平行，即向量方向一致，那么存在λ使得

$$\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a},\, \lambda=\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}, \tag{11}$$

另一种证明向量平行的方法是通过外积，平行的向量外积$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$。特别地，零向量与任意向量都平行；如果两个向量$\mathbf{a}=(x_1,y_1,z_1)$和$\mathbf{b}=(x_2,y_2,z_2)$垂直，那么内积$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$，即$x_1x_2+y_!y_2+z_1z_2=0$。特别地，零向量与任意向量都垂直。

向量的运算具有许多运算法则，主要包括结合律、交换律和分配律。大多数交换律和分配律都成立，与内积外积相关的结合律一般都不成立，而外积的交换律也不成立。通过直接表示法和坐标表示法很容易证明这些定律。我们就易错点主要说明：
1.内积/外积和数乘的结合律成立：$k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$和$k(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(k\mathbf{a})\times\mathbf{b}$；但是内积外积的结合律都不成立：如向量$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$与向量$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$一般不相等；数值$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$和数值$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$一般不相等；向量$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$和向量$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$一般不相等。
2.内积具有交换律：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$；外积不具有交换律而具有**反交换律**：$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$。

解决和向量代数有关的题目，除了要熟悉使用坐标的方法计算向量运算和判断向量位置关系以外，还应该学会使用直接表示法背景下各类向量运算的定律。我们来看下面两个例题：

例 1. 证明向量恒等式$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$。

Proof. 根据分配律

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\times\mathbf{a}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\mathbf{b} \\ &= -\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b} \\ &= 2(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\end{aligned} \tag{12}$$

其中第二个等号利用了$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{b}=0$，第三个等号利用了外积的饭交换律。 □

例 2. 已知$\mathbf{a}=(1,-2,1),\mathbf{b}=(3,0,1),\mathbf{c}=(2,1,2)$，求$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$和$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

Proof. 根据外积坐标运算

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(-2,2,6), \tag{13}$$

由此

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=-4+2+12=10. \tag{14}$$

另一方面根据外积坐标运算

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=(-1,-4,3), \tag{15}$$

由此

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(1,-2,1)\times(-1,-4,3)=(-2,-4,-6). \tag{16}$$

□

1.2 平面的方程

解析几何的实质，是通过向量代数技巧给出几何图形在直角坐标系的方程，然后转化几何问题为代数问题，借助微积分的技巧解决问题。空间平面方程常用的形式有四种：法式方程、一般方程、三点式方程和截距式方程。其中法式方程使用范围最广泛，但是解题时建议化简到一般方程。计算平面方程的核心是计算法向量。

法式方程

首先介绍法向量的概念。对于给定平面，我们总可以找到一个与平面垂直的向量$\mathbf{n}$，称之为**法向量**。如果不加说明，本讲义提到的法向量是单位向量，即满足$|\mathbf{n}|=1$的法向量，因此一个平面具有方向相反的两个法向量，代表平面的两侧。

法式方程通过法向量刻画平面。给定平面上一点$P:(x_0,y_0,z_0)$，那么对于任意一点$A:(x,y,z)$，向量$\overrightarrow{PA}$作为平面上的向量垂直于法向量，即$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0$对平面上每一个$A$成立。设$\mathbf{n}=(A,B,C)$，写成坐标形式：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{17}$$

如上便是平面上的点$A:(x,y,z)$所满足的法式方程。

法式方程告诉我们最重要的信息上：**确定一个平面的方程，只需要确定其法向量和平面上一点坐标可以。**确定平面一点坐标很容易，因此确定平面的关键是写出其法向量坐标。法向量是平面性质的重要代言人。

一般方程

展开法式方程(17)，令$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，那么写出平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{18}$$

相应的，对于(18)的平面一般方程，系数组成的向量(A, B, C)就是平面为单位化的一个法向量。

一般方程形式上虽然一般，但是比起法式方程只需要法向量和平面一点两个信息，计算平面一般方程需要求解四个未知数A, B, C, D，虽然这四个未知数在乘除一个常数意义下代表相同的平面。因此直接计算平面一般方程是不划算的，我们也一般不使用一般方程解题。但是在解题过程中，一般需要我们将答案转化为一般方程的形式。

三点式方程

由于不共线的三点确定一个平面，加入找到平面上不共线三个点(x_i, y_i, z_i)，其中$i = 1, 2, 3$，就可以直接“凑出”一个包含上述三个点的平面：

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{19}$$

显然将(x, y, z)代入(x_i, y_i, z_i)时行列式为0。三点式方程一般不在习题中使用，除非题干明确了平面上三个点。

截距式方程

截距式是三点式方程的特例。**截距**是指平面与三个坐标轴交点的坐标，因此可以是负数。假如平面在三个坐标轴截距分别为A, B, C，那么点$(A, 0, 0)$，点$(0, B, 0)$和点$(0, 0, C)$都在平面上，因此凑出平面方程

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1. \tag{20}$$

截距式方程有很大局限性。**如果平面在某个坐标轴截距为0，那么截距式方程失效。**除非题干明确了平面截距信息，否则截距式方程一般不在习题中使用。

平面方程的计算选讲

例 3. 求过点$(3, 2, -5)$与x轴的平面方程。

Proof. 在x轴上取两点$(0, 0, 0)$和$(1, 0, 0)$，结合点$(3, 2, -5)$用三点式方程

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0, \tag{21}$$

根据行列式展开

$$5y + 2z = 0. \tag{22}$$

$\square$

例 4. 设一个平面在各个坐标轴的的截距均相等且经过$(5,-7,4)$，求其一般式方程

Proof. 设三个坐标轴的截距都是A，分情况讨论：
1.如果$A\neq 0$，那么根据截距式可以写出平面方程

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{A}+\frac{z}{A}=1. \tag{23}$$

代入点$(5,-7,4)$得$A=2$，由此平面$\frac{x+y+z}{2}=1$满足条件。
2.如果$A=0$，此时方程不能写成截距式形式。由于平面在三个坐标轴的截距都是0，那么平面一定过原点$(0,0,0)$，所以平面具有形式

$$Ax+By+Cz=0. \tag{24}$$

代入点$(5,-7,4)$会发现系数A,B,C选取不唯一，只要满足$5A-7B+AC=0$且A,B,C不同为0即可。 $\square$

1.3 直线的方程

空间直线方程常用的形式有三种：两面式（一般方程）、标准方程和参数方程，其中标准方程和参数方程是最常使用的，解题过程中建议化简到标准方程或参数方程。计算直线方程的核心是计算方向向量。

两面式方程

两个不平行的平面相交出一条直线，因此可以直接通过写出两个平面的方程来表示其交线方程，即两面式：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{25}$$

两面式是很不负责任的方法，建议不要使用。

标准方程

我们首先定义直线的方向向量。如果向量$\mathbf{e}$与直线平行，就称为直线的**方向向量**。如果不加说明，本讲义提到的方向向量是单位向量，显然直线具有两个单位方向向量，代表了直线的两个定向。**要确定一条直线，只需要确定直线上的一个点，在确定其方向向量来表示直线的延伸方向即可。**受此启发我们给出直线的标准方程。设方向向

量$\mathbf{e}=(a,b,c)$，给定直线上的点$P_0:(x_0,y_0,z_0)$。对于直线上另一点$P:(x,y,z)$都有向量$\overrightarrow{PP_0}$与向量$\mathbf{e}$平行。根据向量平行的判别方法我们有

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}. \tag{26}$$

特别注意，由于方向向量的某个分量允许是0，所以在写出直线标准方程时是允许0出现在分母的，但是由于这样的记法比较别扭，所以我们更多的时候会使用参数方程表征直线。

参数方程

在式(26)取

$$t=\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\in(-\infty,+\infty). \tag{27}$$

可得参数方程

$$\begin{cases} x-x_0=ta, \\ y-y_0=tb, \qquad (-\infty<t<+\infty) \\ z-z_0=tc, \end{cases} \tag{28}$$

需要注意，研究直线的参数方程必须给出参数t的定义域是全体实数。如果参数定义域不是全体实数，指代的几何对象从直线变成了线段或射线。

两面式方程向标准方程的转化

将两面式方程转化为标准方程或参数方程是非常经典的习题，这类问题的本质是从两面式方程中提取出方向向量的信息，这里可以体现方向向量在研究直线的重要意义。

例 5. 将由两面式方程$l:\begin{cases} x-3z+5=0, \\ y-2z+8=0, \end{cases}$ 确定的直线化为标准式方程。

Proof. 要将两面式化为标准式，就需要找到直线上的一个点和直线l的方向向量$\mathbf{e}$。我们注意到直线l作为平面$x-3z+5=0$和平面$y-2z+8$的交线，方向向量$\mathbf{e}$必然与平面$x-3z+5=0$和平面$y-2z+8$的法向量都垂直，即$\mathbf{e}$与法向量$(1,0,-3)$和$(0,1,-2)$垂直，因此可以通过计算法向量$(1,0,-3)$和$(0,1,-2)$的外积计算方向向量$\mathbf{e}$

$$\mathbf{e}=(1,0,-3)\times(0,1,-2)=(3,2,1). \tag{29}$$

另一方面，我们显然可以取l上一个点$(-5,-8,0)$，由此可得l的一个标准式方程

$$\frac{x+5}{3}=\frac{y+8}{2}=z. \tag{30}$$

□

1.4 位置关系

这一节我们讨论直线和平面的位置关系，判别方法主要是通过平面的法向量和直线的方向向量，从向量代数的层面分析平面和直线的位置关系。

直线与直线

平面与平面的位置关系有两种：重合、平行、相交，其中平面垂直是相交的特殊情况。其中重合的情形是容易判别的，我们也可以将重合看作平行的特殊情况。我们主要讨论通过法向量判别平面的平行和相交的方法：

1.平行或重合 两个平面平行或重合的充分必要条件是**法向量平行**。

2.垂直 两个平面垂直的充分必要条件是**法向量垂直**。

3.相交 两个平面相交的充分必要条件是**法向量不平行**。

如果写出两个平面的一般式方程$\Sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$和$\Sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$，根据之前的分析不难写出它们的法向量$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$和$\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$，由此可以直接通过一般式的系数判别$\Sigma_1$和$\Sigma_2$的位置关系（不建议直接背上述通过系数判别平面位置关系的方法，通过法向量判别直线的位置关系更加直接）：

1.平行 Σ_1和Σ_2平行的充分必要条件是系数(A_1, B_1, C_1)和(A_2, B_2, C_2)成比例或$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 0$。

2.垂直 Σ_1和Σ_2平行的充分必要条件是系数满足$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$或$\mathbf{n}1 \cdot \mathbf{n}2 = 0$。

直线与平面

直线与平面的位置关系有三种：平行、相交、包含，其中垂直是相交的一种特例。通过法向量和方向向量判别直线与平面位置关系的方法如下

1.平行 直线包含与平面的充分必要条件是**直线的方向向量垂直于平面的法向量**，并且直线和平面没有交点。

2.包含 直线包含与平面的充分必要条件是**直线的方向向量垂直于平面的法向量**，并且直线和平面有交点。

3.垂直 直线包含与平面的充分必要条件是**直线的方向向量平行于平面的法向量**。

4.相交 直线包含与平面的充分必要条件是**直线的方向向量不垂直于平面的法向量**。

直线与直线

直线与直线的位置关系有四种：重合、平行、相交、异面。**其中直线垂直并不说明直线一定相交，异面直线也可以垂直，这是值得注意的。**单独从方向向量出发还不能完全判别直线之间四种关系，还需要细致讨论：

1.平行或重合 两条直线平行或重合的充分必要条件是方向向量平行。

2.垂直 两条直线垂直的充分必要条件是方向向量垂直。

3.相交 判别两条直线是否相交的方法是联立参数方程求解，如果可以解出交点坐标说明直线相交。

4.异面 判别两条直线是否异面的方法是通过排除法，即两条直线的方向向量不平行（说明不平行），同时直线没有交点（说明不相交）。

直线/平面位置关系相关例题选讲

这类例题一般通过研究平面法向量或直线方向向量的位置关系，来确定平面和直线的位置关系。

例 6. 求过点$(2,0,-3)$且垂直于平面$2x-2y+4z+7=0$和$2x+y-2z+5=0=0$的平面的一般式方程。

Proof. 设所求平面为Σ。由于我们已知所求平面Σ上的点$(2,0,-3)$，我们还要计算平面Σ的法向量，设为$\mathbf{n}$。由于Σ与平面$2x-2y+4z+7=0$和$2x+y-2z+5=0=0$垂直，那么$\mathbf{n}$与平面$2x-2y+4z+7=0$和$2x+y-2z+5=0=0$的法向量$(2,-2,4)$和$(2,1,-2)$均垂直，由此

$$\mathbf{n}=(2,-2,4)\times(2,1,-2)=(0,12,6). \tag{31}$$

因此得到Σ的方程

$$12y+6(z+3)=0. \tag{32}$$

化简为一般式

$$2y+z+3=0. \tag{33}$$

□

例 7. 判断直线$l_1:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$和直线$l_2:\begin{cases}x=-2\\y=t+1\\z=-2t+2\end{cases}$的位置关系。

Proof. 直线之间的位置关系包括重合、平行、相交、异面四种，我们依次判别。首先考虑l_1,l_2是否平行或重合。l_1和l_2的方向向量分别为$\mathbf{e}_1=(-1,2,1)$和$\mathbf{e}_2=(0,1,-2)$，两个向量显然不平行，所以l_1与l_2不平行或重合。接着考虑l_1,l_2是否相交，将l_2的参数方程代入l_1联立

$$3=\frac{t+1}{2}=3-2t. \tag{34}$$

由此t无解，所以l_1,l_2不相交。根据排除法，得l_1,l_2异面。 □

距离的计算

我们常常讨论的距离包括点到直线的距离、点到平面的距离和平行平面之间的距离。其中直线之间的距离也有定义，但是其中异面直线距离的定义的计算超出了课程范围。我们将分别讨论前三类距离的计算方法。

首先点(x_0, y_0, z_0)到平面$Ax + By + Cz + D = 0$的距离是

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{35}$$

上述公式属于高中内容的范畴，证明略。

然后平行平面$Ax + By + Cz + D_1 = 0$和$Ax + By + Cz + D_2 = 0$的距离是

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{36}$$

它的实际意义是一个平面上任意一点到另一个平面的距离，而显然平行平面的任一点到另一个平面的距离都相同。不平行的平面无法定义距离。

最后是点到直线距离的计算，其实质是点向直线做垂线的距离。点$M_0 : (x_0, y_0, z_0)$到直线$l : \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$的距离公式是

$$d = \left|\mathbf{e} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|, \tag{37}$$

其中向量$\mathbf{e}$是l的单位方向向量，M_1为l上任意一点。这一公式的意义是，假定点M_0到l的垂足是P，那么d等于直线PM_0的长度，设$\angle PM_1M_0 = \theta$，那么$d = |M_0M_1| \sin\theta$，注意到PM_1是直线l上的线段，所以

$$d = |M_0M_1| \sin\theta = |\overrightarrow{M_0M_1}| \cdot \frac{\left|\mathbf{e} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| \cdot |\mathbf{e}|} = \left|\mathbf{e} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|. \tag{38}$$

我们指出，上述公式也可以用于计算平行直线之间的距离，平行直线距离的定义是指直线上任意一点到另一条直线的距离。

例 8. 求$(2, 1, 3)$到平面$2x - 2y + z - 3 = 0$的距离。

Proof. 直接使用公式计算

$$d = \frac{|4 - 2 + 3 - 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{2}{3}. \tag{39}$$

□

例 9. 求点$(3, 4, 5)$到直线$x = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}$的距离。

Proof. 为了使用公式，我们首先得到直线$x=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$的方向向量为$\mathbf{e}=(1,-3,-2)$，做单位化得

$$\mathbf{e}=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,-3,-2). \tag{40}$$

此外任取直线上一点$M_1:(0,4,3)$，由$M_0:(3,4,5)$得向量

$$\overrightarrow{M_0M_1}=(-3,0,-2). \tag{41}$$

所以计算外积

$$\mathbf{e}\times\overrightarrow{M_0M_1}=\frac{1}{\sqrt{14}}(6,8,-9). \tag{42}$$

代入公式

$$d=\left|\mathbf{e}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\frac{\sqrt{189}}{\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}. \tag{43}$$

□

*补充内容：平面束的概念

设两个不平行的平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$相交于直线L，那么任意一个过L的直线方程可以写成如下的方程 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$，其中$\lambda$和$\mu$是不全为0两个常数。根据不同的$\lambda$和$\mu$确定的平面族被称为平面束。这一结论有时能在解题中发挥意想不到的作用。

例 10. 求通过直线$l_1:\begin{cases}x-2z-4=0,\\3y-z+8=0,\end{cases}$ 且与直线$l_2:\begin{cases}x-y-4=0,\\-y+z+6=0,\end{cases}$ 平行的平面Σ方程。

Proof. 本题显然有Σ的法向量$\mathbf{n}$与直线l_1的方向向量$\mathbf{e}_1$以及直线l_2的方向向量$\mathbf{e}_2$都垂直，只要先通过外积方法计算出$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_2$，再由$\mathbf{n}=\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2$就可以计算法向量$\mathbf{n}$。

我们这里计算一种通过平面束计算的方法：由于Σ经过平面$x-2z-4=0$和$3y-z+8=0$的交线l_1，所以假设Σ的方程为

$$\lambda(x-2z-4)+\mu(3y-z+8)=0 \tag{44}$$

化简得

$$\lambda x+3\mu y-(2\lambda+\mu)z+(8\mu-4\lambda)=0. \tag{45}$$

得到法向量$\mathbf{n}=(\lambda,3\mu,-2\lambda-\mu)$。另一方面，通过$l_2$的两面式方程得出方向向量$\mathbf{e}_2$满足

$$\mathbf{e}_2=(1,-1,0)\times(0,-1,1)=(-1,-1,-1), \tag{46}$$

根据题设知$\mathbf{n}$和$\mathbf{e}_2$垂直，所以

$$\lambda+3\mu-2\lambda-\mu=0, \tag{47}$$

由此$\lambda=2\mu$，最后得出Σ的一般式方程

$$2x+3y-5z+12=0. \tag{48}$$

□

1.5 空间曲线和曲面

空间曲线

通过方程的方式研究曲线是很方便的，曲线的方程有很多类，我们一般使用参数方程来研究

$$L:\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{49}$$

我们指出，研究曲线必须声明参数t的定义域。有时我们会直接将三个分量写成向量值函数的形式$\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$，然后用$\mathbf{r}(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$直接表达一条空间曲线，这相当于将$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$看成了将实数$t$对应到向量$\mathbf{r}(t)$的函数。在本章中要求掌握的是曲线**切向量**和**法平面**的计算，这些计算是下册学习的曲面积分的基础。对于参数方程(49)确定的空间曲线，切向量是指曲线沿定向的切线的方向向量，为$\mathbf{e}=(x'(t),y'(t),z'(t))$。法平面则是过给定点$(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$且以切向量$\mathbf{e}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$为法向量的平面。如果曲线写成$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$的形式，给定点$t=t_0$的切向量简写为$\mathbf{r}'(t_0)$。

最后我们指出，平面曲线相较空间曲线，也可以使用参数方程研究：

$$L:\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\,. \tag{50}$$

其切向量为平面向量$\mathbf{e}=(x'(t),y'(t))$。由于平面是相对简单的，我们还有两种表达曲线的方式：一般方程和极坐标方程。一般方程是指

$$y=y(x),\quad a<x<b. \tag{51}$$

一般方程只能表达由函数确定的曲线，是有局限性的，其可以看作以x为自变量的曲线。极坐标方程是指极坐标平面上的方程

$$r=r(\theta),\quad a<\theta<b. \tag{52}$$

但是极坐标方程计算切向量是比较麻烦的，我们一般首先将极坐标方程转化为参数方程

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta, \\ y=r(\theta)\sin\theta, \end{cases} \quad (a\leqslant\theta\leqslant b)\,, \tag{53}$$

然后再计算切向量。

例 11. 设$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$是一条光滑曲线，满足$|\mathbf{r}(t)|=C$对定义域中的t都成立，其中C是非零常数。求证：$\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)=0$对一切$t$成立。

Proof. 写出$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$的分量形式

$$\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\tag{54}$$

那么

$$|\mathbf{r}(t)|=\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2+(z(t))^2}\equiv C,\tag{55}$$

所以求导得对一切t有

$$\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)+z(t)z'(t)}{\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2+(z(t))^2}}=0.\tag{56}$$

由于C是非零常数，所以对一切t有

$$\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)=x(t)x'(t)+y(t)y'(t)+z(t)z'(t)=0\tag{57}$$

□

曲面

空间曲面有一般方程（包括隐函数方程）和参数方程两种

1.曲面的一般方程$z=g(x,y)$，其中自变量取值范围$(x,y)\in D$，D是平面区域。几何上看，区域D是空间曲面$z=g(x,y)$在XoY平面的投影。以不同的自变量还可以写出其他的曲面一般方程$x=h(y,z)$或$y=l(x,z)$，他们对于曲面的研究都很重要。有时曲面的一般方程写不出来，我们可以将z关于x,y的关系写成隐函数$S(x,y,z)=0$。

3.曲面的参数方程$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v),\end{cases}$ 其中自变量取值范围$(u,v)\in D'$，其中D'是UoV平面的一个区域。形式上，一般方程也可以看作特殊的参数方程。

在下一章中我们可以给出曲面的切平面和法向量的定义，这里先不做讨论。我们通过下面的例题简单讨论下曲面方程的分析：

例 12. 求直线$l:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$关于$z$轴旋转一圈得到的曲面$S$的方程。

Proof. 给定l上的点(x_0,y_0,z_0)，所谓绕z轴旋转一圈是指所有满足

$$\begin{cases}x^2+y^2=x_0^2+y_0^2,\\ z=z_0,\end{cases}\tag{58}$$

的点(x,y,z)都在l旋转一圈的过程中被经过。随着z_0在$(-\infty,+\infty)$变化，具有不同z坐标分量的S上的点被涉及。根据直线的方程

$$x_0=z_0=z,\, y_0=1, \tag{59}$$

所以S上的点(x,y,z)满足方程

$$x^2+y^2=z^2+1. \tag{60}$$

□

2 习题归类

本节的重点是向量的运算、直线和平面方程计算与位置关系。常见习题包括

1.向量坐标运算，尤其是外积和内积的计算。

2.向量直接运算，主要是使用外积和内积的各种计算法则。

3.根据题目条件计算平面、直线方程，这类题目应抓住平面和直线的法向量和方向向量分析。

4.分析平面和直线的位置关系，这类题目中较为有难度的是两条直线的位置关系，其中判别两条直线是否相交或异面需要联立方程计算。

5.距离的计算，包括点线距离、点面距离、面面距离和平行直线间的距离。

6.曲线方程的计算。

本章在考试中主要为送分题，不设扩展补充部分。