北京大学高等数学B习题课讲义：洛必达法则和泰勒公式

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后修改：2022.11

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。本讲义中，凡以x,y为自变量的极限均指函数极限，以n,m为变量的极限均指序列极限，请读者务必区分。

1 知识点理解

本节主要讨论导数在微分学的两个重要应用：洛必达法则和泰勒公式。在学习过程中，既要注意两大工具的使用方法，也要注意定理的内涵。

1.1 洛必达法则：理解与应用

不定式的概念回顾

洛必达法则是旨在解决**函数极限不定式**计算的方法。我们先回顾不定式的概念。我们接触的大多数极限都是连续函数及其四则运算的极限，如极限$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+1}$，根据连续性$\lim_{x\to 0}(x+1)=\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1$，再利用极限的四则运算性质就可以计算极限$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+1}=1$。

但是有一类极限的值不能通过极限四则运算计算，例如极限$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$，直接利用连续函数的性质计算得到$\lim_{x\to 0}(x-1)=\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$，如果直接使用极限四则运算极限得到$\frac{0}{0}$。对实数的运算而言，$\frac{0}{0}$没有意义，而极限$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$。之所以算不出正确的答案是因为极限的除法运算性质，是因为极限运算$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$成立需要分母极限$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$。这样不能使用四则运算直接计算的极限我们称为**不定式**，有关不定式极限的计算是需要我们单独设计有效方法的。

我们再以$\frac{\infty}{\infty}$为例加深对不定式概念的理解，这里∞就指一个无穷大量极限。考虑$x \to +\infty$时，极限$\ln x$，x和e^x都是无穷大量，显然三者趋于$+\infty$的速度是依次增加的，用极限语言刻画是$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$以及$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$。由此可见，同样是$\frac{\infty}{\infty}$型的极限，根据无穷大量的不同，极限的值也完全不同。

在本节我们主要关注的不定式有如下几类：

$$\frac{0}{0} \quad, \frac{\infty}{\infty} \quad, 0 \cdot \infty \quad, (+\infty) - (+\infty) \quad, 1^{\infty} \quad, 0^0 \quad, (+\infty)^0. \tag{1}$$

然而归根结底，上述每一类不定式都可以化为最基本的不定式$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$，例如：

$$1^{\infty} = \exp\left(\infty \cdot \ln(1)\right) = \exp\left(\infty \cdot 0\right) = \exp\left(\frac{0}{0}\right). \tag{2}$$

因此洛必达法则主要是针对$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$两种不定式。如果要对上述其他类型不定式使用洛必达法则，**必须首先将其他类型的不定式化为$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$两种不定式。**

洛必达法则的叙述与释疑

洛必达法则讨论的是$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$两种不定式型的函数极限，其叙述为：

定理 1.1. 设函数$f(x)$和$g(x)$都在$x = a$的某邻域可导（这里a可以是∞，邻域也可以是单侧的），且$g'(a) \neq 0$，还满足
1.**$\frac{0}{0}$**型 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$。
2.**$\frac{\infty}{\infty}$**型 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$。
那么如果$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$，其中$l$可以是实数或$\pm\infty$，那么极限$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$。

关于洛必达法则我们需要几点说明：
1.洛必达法则不能简单地写成$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$，因为只有当极限$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$存在或广义存在（即极限为$\infty$）时，极限$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$才与极限$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$相等。如果极限$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$是发散的，那么极限$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$有可能存在也有可能发散，我们无法从洛必达法则得到任何关于极限$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$的信息。兹举例：考虑极限$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x}$，用洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+\cos x)'}{(2x+\sin x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sin x}{1+\cos x}. \tag{3}$$

显然$\frac{1-\sin x}{1+\cos x}$是以$2\pi$的震荡函数，所以极限$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sin x}{1+\cos x}$发散；但这不意味着原极限$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x}$也发散，因为

$$lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = \frac{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}}{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1. \tag{4}$$

由此$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\cos x}{2x+\sin x} = 1$。**因此洛必达法则的使用实质是“尝试”的过程**，即为了计算极限$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$，我们尝试计算$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$，如果极限$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$收敛，则极

限$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$收敛且相等；若极限$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$发散，尝试失败。
2.洛必达法则也可以处理单侧极限和趋于∞的极限。 如果极限$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$，即广义收敛，我们依然可以用洛必达法则得到$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$。
3.洛必达法则不适用于序列极限。 如果想对序列极限使用洛必达法则，必须将序列极限首先换元处理为函数极限。

洛必达法则的使用方法

洛必达法则处理函数极限一般分为三个步骤：检查极限是否为不定式、将极限转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$两种不定式型极限，用洛必达法则计算$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$极限。本节通过五道经典习题，带大家熟悉洛必达法则的五类经典题型，以及使用洛必达法则过程中简化计算的几个小技巧。

例 1. 分式型极限 计算极限$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x-\ln(1+x)}$。

Proof. 显然极限$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x-\ln(1+x)}$是$\frac{0}{0}$不定式，我们连续使用洛必达法则计算

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x-\ln(1+x)} &\overset{洛}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1-\frac{1}{1+x}} \\ &= \lim_{x\to 0}-\frac{(1+x)\sin x}{x}=\left(\lim_{x\to 0}-1-x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=-1.\end{aligned} \tag{5}$$

没有经验的读者可能在一次洛必达得到极限$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1-\frac{1}{1+x}}$，这种“能洛尽洛”的想法不正确：因为极限$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1-\frac{1}{1+x}}$通过通分就可以得到两个可计算极限的积。**因此在完成一次洛必达后，应首先观察极限是否已经可以计算，再考虑是否继续使用洛必达。** □

例 2. 乘法型极限 计算极限$\lim_{x\to 0}x^n\ln x$，其中n是正整数。

Proof. 本题是$0\cdot\infty$型极限，对于这类问题，应首先将其转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$，方法是对乘式其中一项取倒数。对于本题来讲，写成除式的方法有两种：$\frac{x^n}{(\ln x)^{-1}}$或$\frac{\ln x}{x^{-n}}$。比较而言，$(\ln x)^{-1}$的导数不好计算，因此建议写成第二种分式的形式

$$\lim_{x\to 0}x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-n}}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{-nx^{-n-1}}=-\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}x^n=0. \tag{6}$$

本题计算告诉我们，**洛必达法则选择除式的形式时，应遵从使得分子分母求导更简单的准则。** □

例 3. 减式型极限 计算极限$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$。

Proof. 极限$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$是$\infty-\infty$型不定式，**这类问题首先通分再使用洛必达法则**：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right) &\overset{\text{通分}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}\\ &\overset{\text{洛}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x)-1}{\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\ln(x+1)+1-\frac{1}{x+1}}\\ &\overset{\text{洛}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{-1}}{(x+1)^{-1}+(x+1)^{-2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{7}$$

本题经过三次洛必达法则才使得$\frac{0}{0}$不等式化为可四则运算的极限，而利用等价无穷小方法我们可以从第二步开始大大简化计算：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\frac{1}{2}.\tag{8}$$

在复杂极限问题时巧妙运用等价无穷小方法，通常可以简化洛必达法则的计算。 □

例 4. 幂式型极限 计算极限$\lim_{x\to 0+0}x^x$。

Proof. 极限$\lim_{x\to 0+0}x^x$是0^0型不定式，我们**首先取对数再使用洛必达法则**

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=\lim_{x\to 0+0}\exp(x\ln x)=\exp\left(\lim_{x\to 0+0}x\ln x\right).\tag{9}$$

注意到极限$\lim_{x\to 0+0}x\ln x$是$0\cdot(-\infty)$的乘积不定式，我们可以将它化为$\frac{\infty}{\infty}$的不定式，然后使用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0+0}x\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+0}-x=0.\tag{10}$$

由此本题答案为$\mathrm{e}^0=1$。 □

例 5. 1^∞幂式型极限 计算极限$\lim_{x\to 0}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$。

Proof. 本题是1^∞型极限，既可以使用1^∞极限的凑e方法，也可以使用直接取对数的方法，先介绍取对数的方法

$$\lim_{x\to 0}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\right),\tag{11}$$

这一做法的好处是下述导数事实$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1,\tag{12}$$

因此本题答案为$\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$。

如果使用凑e的方法解答如下：

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)\right]^{\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}-1}}\right\}^{\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x}} \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right), \qquad (13)
\end{aligned}
$$

其中$x+\sqrt{1+x^2}-1$是无穷小量，根据$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e}$得

$$
\lim_{x\to 0}\left[1+\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)\right]^{\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}-1}}=\mathrm{e}, \qquad (14)
$$

然后才有了上式的推导。利用洛必达法则计算指数上的极限（用根式有理化也可以解）

$$
\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=\frac{1+0}{1}=1. \qquad (15)
$$

因此本题答案为$\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$。

我们指出，凑e法和取对数法可以等价：因为$x+\sqrt{1+x^2}-1$是无穷小量，根据等价无穷小变换$y\sim\ln(1+y)$有

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x}, \qquad (16)
$$

因此式(11)和式(13)中的指数上的极限具有相同的值。**直接取对数和凑e都是都是将1^∞不定式化为除法不定式的方法，相较而言直接凑e的方法更为普适，取对数的方法虽然直接但是有时计算量比较大。**对于本题来说，由于$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$求导比较简单，所以“显得”直接取对数并不难算。 □

我们指出，在使用洛必达法则求不定式极限时，虽然洛必达法则读者都熟悉，但是将题目里的不定式转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$不定式的过程是很有技巧性的，通常要结合洛必达法则与等价无穷小方法、代数变形等，需要读者通过做题去积累，上述例题只给出最典型的方法。

1.2 理解泰勒公式

泰勒公式是微积分中最有用的工具，但是也是是很难理解的概念。理解泰勒公式，除了要记住其定义和计算方法，更需要理解其引入动机和目的。我们这里从目的的角度介绍泰勒公式的核心目标：**它将严格给定的函数$f(x)$在某个局部用n次多项式$P_n(x)$来近似。**

设函数$f(x)$是给定的，我们自然不能期望n次多项式$P_n(x)$能在任意大的区间近似$f(x)$，因此我们通常把目光聚焦在一个邻域(x_0-r,x_0+r)，同时假定n次多项式$P_n(x)$为

$$
P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots+A_n(x-x_0)^n, \qquad (17)
$$

其中$A_0, A_1, \cdot, A_n$是各次系数。理论指出（这部分理论比较麻烦，可以参见教材详解，初学者建议抓住更本质的“多项式近似”思路），对$f(x)$近似最好的多项式是具有下述形式的**泰勒多项式**

$$P_n^T(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad (18)$$

其中$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$对$k = 0, 1, \cdots, n$。例如，考虑一次泰勒多项式的近似为

$$f(x) \approx P_1^T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0). \quad (19)$$

考虑到$P_1^T(x)$具有微分的形式，代表了$f(x)$在x_0处切线的点斜式方程。根据微分的理论，当$x \to x_0$有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0). \quad (20)$$

右侧的式子是$f(x)$在x_0的一阶微分，实际上一阶微分是泰勒公式在一阶情况下的形式，其主旨都是对$f(x)$做局部近似。

现在我们来回答一个重要的问题：什么样的近似是好的近似？我们期望泰勒多项式的近似误差$e_n(x) = f(x) - P_n(x)$在邻域$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$足够的小。注意到当$x \to x_0$时$e_n(x)$是一个无穷小量，我们以$e_n(x)$**无穷小量的阶的大小来刻画近似的好坏**。由于$P_n(x)$是$n$次的多项式，我们自然期望$e_n(x)$成为比$n$次无穷小量$(x-x_0)^n$更高阶的无穷小量，即$e_n(x) = o((x-x_0)^n)$。实际上我们期望$e_N(x)$成为比$(x-x_0)^n$更高阶的无穷小量是非常合理的，因为$P_n(x)$本身是$n$次多项式，我们通过调整$P_n(x)$的各项系数改变误差函数$e(x)$，但是这样的改变一定是一个不高于$(x-x_0)^n$的小量。由此我们得到了$f(x)$在$x = x_0$的邻域$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$上的**局部泰勒公式**，其形式是**泰勒多项式加上一个高阶小量**：

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n^T(x) + o((x-x_0)^n) \\ &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \\ &\qquad \text{当} x \to x_0, \end{aligned} \quad (21)$$

其中称误差函数$e(x) = o((x-x_0)^n)$为**泰勒公式的皮亚诺余项**。这里我们给出几点释疑：

1.我们知道$o((x-x_0)^n)$代表一个无穷小量，而无穷小量是极限。**局部泰勒公式**(21)**代表的是泰勒多项式$P_n^T(x)$在$x \to x_0$的近似，是一个极限行为**。用极限的语言写下来是

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0, \quad (22)$$

这样的极限语言与小o符号的等价的。但是显然，泰勒公式(21)更方便地表达了这一极限行为。

2.局部泰勒公式分为两部分：泰勒多项式和皮亚诺余项。泰勒多项式由函数f在x_0的

各阶导数决定，根据x_0的不同泰勒多项式是不同的；余项代表了泰勒多项式的近似误差，虽然我们写不出具体表达式，但是我们可以确定当$x \to x_0$时它是一个高于n阶无穷小量。这也告诉我们了写出一个函数在某点x_0的泰勒多项式的步骤，首先计算f的高阶导数并求出对应的泰勒多项式，最后补充皮亚诺余项。

3.局部泰勒公式(21)只需要f在x_0一点存在n阶导数就可以定义，因为泰勒多项式的系数是只与f的高阶导数在x_0处取值有关的，这一点要与后续学习的带拉格朗日余项的泰勒公式区分。

1.3 局部泰勒公式的计算

局部泰勒公式的计算依赖于计算f的各阶导数，而我们知道计算高阶导数并不容易。所以本节我们介绍一下可以避免计算高阶导数的同时，计算给定函数泰勒公式的方法：

公式法

一些简单的函数的高阶导数比较好计算，我们也很容易写出部分简单的函数带马克劳林余项的局部泰勒公式（即0点处的局部泰勒公式，也称**马克劳林公式**）：

$$\mathrm{e}^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o\left(x^n\right) \quad (x \to 0), \tag{23}$$

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right) \quad (x \to 0), \tag{24}$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o\left(x^{2n+1}\right) \quad (x \to 0), \tag{25}$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right) \quad (x \to 0), \tag{26}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right) \quad (x \to 0), \tag{27}$$

关于这些公式有一些释疑：

1.上述公式都刻画的是0处的局部泰勒公式，即$x \to 0$的极限行为。如果考虑$x \neq 0$处的局部泰勒公式，上述公式皆不成立！

2.注意到$\sin x$的局部泰勒公式中，泰勒多项式部分的次数是$2n+1$，因此余项本应该是$o\left(x^{2n+1}\right)$，但是我们给出的Maclaurin余项却是$o\left(x^{2n+2}\right)$，这是因为$\sin x$对应的泰勒多项式中$2n+2$次多项式系数为0，即$2n+2$次项是$0x^{2n+2}$，使得余项可以提升一阶达到$o\left(x^{2n+2}\right)$。另一方面，由于$\sin x$和$\cos x$的高阶导数和次数的奇偶性有关，为了避免奇偶性讨论，我们将$\sin x$和$\cos x$的泰勒多项式写到第$2n$次。

3.注意到$(1+x)^\alpha$的局部泰勒公式中，如果α是正整数，那么泰勒多项式相当于多项式$(1+x)^\alpha$二项式展开的前$n+1$项；在实际应用中，我们一般取α为有理数，例如

当$\alpha = \frac{1}{2}$时，函数$\sqrt{1+x}$有如下局部泰勒公式

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o\left(x^n\right). \tag{28}$$

当$\alpha = -1$时，函数$\frac{1}{1+x}$有如下局部泰勒公式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right). \tag{29}$$

其中泰勒公式(29)中泰勒多项式部分用等比序列求和为

$$1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}, \tag{30}$$

当x接近0时，自然可以认为$\frac{1-(-x)^n}{1+x}$接近$\frac{1}{1+x}$。

既然我们已经了解一些简单的函数的泰勒公式，而泰勒公式本身也是表达极限关系的等式，所以我们考虑一些由已经泰勒公式的函数四则运算而得的函数。由于泰勒公式的四则运算涉及o余项的运算，我们首先总结：考虑$x \to 0$，设正整数$m < n$，那么加法运算满足

$$x^n + o\left(x^m\right) = o\left(x^m\right), \quad o\left(x^n\right) + o\left(x^m\right) = o\left(x^m\right), \tag{31}$$

其实质是，x^n或$o\left(x^n\right)$都是比x^m更高阶的无穷小量，自然也可以包含在无穷小量$o\left(x^m\right)$中；设m, n是两个正整数，考虑乘法运算

$$x^n \cdot o\left(x^m\right) = o\left(x^{m+n}\right), \quad o\left(x^n\right) \cdot o\left(x^m\right) = o\left(x^{m+n}\right), \tag{32}$$

其实质是，两个无穷小量相乘可以得到阶数更高的无穷小量。关于无穷小量的计算公式无需记忆，更多地要理解其实质。

接下来我们介绍几个借助公式计算局部泰勒公式的例子：

例 6. 乘法运算 计算$y = \mathrm{e}^x \sin x$带*Maclaurin*余项的局部泰勒公式，其中余项展到$o(x^4)$。

Proof. 借助泰勒公式(23)和(24)得到

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^x \sin x \\
= \; & \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \\
= \; & x + x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) x^3 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) x^4 + o(x^4) \\
= \; & x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4).
\end{aligned} \tag{33}$$

初学者可能会对如何选择e^x和$\sin x$泰勒公式的项数有所疑惑。实际上，因为我们希望找到$\mathrm{e}^x \sin x$的余项$o(x^4)$的泰勒公式，相当于要写出$\mathrm{e}^x \sin x$的四次泰勒多项

式。而$\mathrm{e}^x\sin x$的四次泰勒多项式只能由e^x和$\sin x$的泰勒公式中次数不大于四的项相乘而得，因此我们也只需将e^x和$\sin x$展开的余项$o(x^4)$。实际上，即便是e^x和$\sin x$的泰勒多项式中不大于四次的项，乘起来也可能得到大于四阶的无穷小量（例如e^x的项$\frac{x^2}{2}$和$\sin x$的项$-\frac{x^3}{6}$，乘起来得到的无穷小量属于$o(x^4)$），这样的项乘积无需计算，直接进入$\mathrm{e}^x\sin x$的泰勒公式的余项$o(x^4)$里。 □

例 7. 换元运算 计算$y=\frac{1}{1+x^2}$带*Maclaurin*余项的局部泰勒公式。

Proof. 我们之前给出过$\frac{1}{1+x}$的泰勒公式(29)，为了方便理解我们选用自变量t:

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^n t^n+o\left(t^n\right). \tag{34}$$

由于泰勒公式是**描述极限行为的等式**，我们可以使用极限换元法。在(34)取换元$t=x^2$，显然$x\to 0$同时有$t\to 0$，因此

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n}). \tag{35}$$

特别注意到，$\frac{1}{1+x^2}$的泰勒多项式的奇数次项系数均为0，使用我们也可以写为

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1}). \tag{36}$$

□

例 8. 分式拆分 计算$y=\frac{x^3+2x+1}{x^2-1}$带*Maclaurin*余项的局部泰勒公式。

Proof. 模仿处理有理分式积分的方法，可以将$\frac{x^3+2x+1}{x^2-1}$首先由假分式化为真分式，然后分解为基本分式的和

$$\frac{x^3+2x+1}{x^2-1}=x+\frac{3x+1}{x^2-1}=x+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}, \tag{37}$$

其中$\frac{1}{x+1}$的泰勒公式是我们熟悉的，考虑$\frac{2}{x-1}=\frac{-2}{1+(-x)}$，并在泰勒公式(29)中用$-x$替代$x$有

$$\frac{2}{x-1}=-2-2x-2x^2-\cdots-2x^n+o(x^n), \tag{38}$$

由此

$$\begin{aligned}
&\frac{x^3+2x+1}{x^2-1}\\
=\;& x+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}\\
=\;& x+\left(-2-2x-2x^2-\cdots-2x^n+o(x^n)\right)+\left(1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right)\right)\\
=\;& -1-2x-x^2-3x^3-\cdots-\left(2+(-1)^n\right)x^n+o(x^n).
\end{aligned} \tag{39}$$

我们指出，如果想对复杂的函数应用拆分法求解泰勒公式，可以借鉴学习有理分式积分时的待定系数拆分技巧，将分式写成若干个简单分式的和。 □

微分法

接下来要介绍的微分法使得我们可以对更广的一类函数计算其泰勒公式，我们直接看例题：

例 9. 计算$y=\arctan x$带$Maclaurin$余项的局部泰勒公式。

Proof. 我们知道$y'=\frac{1}{1+x^2}$，根据前面的例题可以写出y'的局部泰勒公式：

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1}). \tag{40}$$

接下来的部分我们分为直观理解和严格叙述两部分叙述：

直观理解 对Taylor公式(40)的左右两侧同时计算积分：

$$y=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2}), \tag{41}$$

这里我们还借助了无穷小量的形式积分运算$\int o(x^{2n+1})\mathrm{d}x=o(x^{2n+2})$。从直观上，$2n+1$次的函数积分得到$2n+2$次的函数是直观的，上述方法得到的泰勒公式也是完全正确的，但是上述方法理论有两个错误：

1.积分$\int o(x^{2n+1})\mathrm{d}x=o(x^{2n+2})$是毫无道理的形式计算，我们完全不了解小量$o(x^{2n+1})$具体的不等式。

2.泰勒公式(40)不是简单的等式，而是刻画$x\to 0$的极限，我们曾经说过极限运算和积分运算通常不能换序，因此我们不能做形如式(41)的，对于y'泰勒公式逐项地积分。

即便如此，上述方法不仅可以得到正确的泰勒公式，还有很好的指导意义。从泰勒多项式系数的角度，我们可以把上述推理避开积分语言严格化。

严格叙述 由于y'是y的导数，因此函数y'的n阶导数就是y的$n+1$阶导数。根据Taylor多项式(40)的表达式，我们可以得到y'高阶导数信息：

$$\frac{(y')^{(n)}(0)}{n!}=\frac{y^{(n+1)}(0)}{n!}=\begin{cases}0, & n\text{是奇数},\\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n\text{是偶数}.\end{cases} \tag{42}$$

进一步

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{是偶数},\\ (n-1)!(-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n\text{是奇数}.\end{cases} \tag{43}$$

由此$y=\arctan$的泰勒多项式的n次项系数为

$$\frac{y^{(n)}(0)}{n!}=\begin{cases}0, & n\text{是偶数},\\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}, & n\text{是奇数}.\end{cases} \tag{44}$$

由此我们可以写出$y=\arctan x$的泰勒公式，其中只有次数为奇数的项：

$$y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}). \tag{45}$$

□

总结下来，微分法处理的是那些y本身泰勒公式很复杂，但是导函数y'可以通过公式法计算处泰勒公式的情形。我们的方法直观为“逐项积分”的方法，但是严格的系数要通过传递高阶导数函数值信息，由y'的泰勒公式反推y的泰勒公式。

不在$x=0$处的局部泰勒公式

上述计算局部泰勒公式的方法都基于几个常见马克劳林公式来计算，因此只能用于计算$x=0$处的泰勒公式。这一节我们介绍不在$x=0$的局部泰勒公式，这类问题的解法通常是通过换元法转化为计算马克劳林公式来解决。

例 10. 写出函数$y=\frac{1}{1+x+x^2}$在$x=-\frac{1}{2}$处的局部泰勒公式。

Proof. 为求$x=-\frac{1}{2}$处的泰勒公式，为此换元$t=x+\frac{1}{2}$。进行代数变形

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\left(1+\frac{4}{3}t^2\right)^{-1}, \tag{46}$$

我们需要计算$y=\frac{4}{3}\left(1+\frac{4}{3}t^2\right)^{-1}$在$t=0$处的局部泰勒公式，这是一个可以通过公式法解决的问题：

$$\left(1+\frac{4}{3}t^2\right)^{-1} = 1 - \frac{4}{3}t^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 t^4 + \cdots + (-1)^n \left(\frac{4}{3}\right)^n t^{2n} + o(t^{2n+1}). \tag{47}$$

由此$y=\frac{1}{1+x+x^2}$在$x=-\frac{1}{2}$处局部泰勒公式为

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3\left(x+\frac{1}{2}\right)^4 \cdots + \\ +(-1)^n\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n} + o\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right).\end{aligned} \tag{48}$$

□

1.4 泰勒公式的应用

本节介绍泰勒公式的三个应用。计算高阶导数和计算极限是局部泰勒公式的直接应用。而为了在证明题使用泰勒公式，通常需要借助带拉格朗日余项的泰勒公式。

计算高阶导数

根据公式(21)，某函数f的泰勒多项式各项的系数是由其高阶导数值$f^{(n)}(x_0)$确定的。而我们此前介绍了许多不依赖高阶导数也可以求出函数f的局部泰勒公式和泰勒多项式的方法。只要写出f的泰勒公式，我们就反推计算高阶导数在给定点的函数值$f^{(n)}(x_0)$。

例如在学习高阶导数的计算时，我们曾采用“化显为隐”的方法计算了$y = \arctan x$的各阶导函数函数值$y^{(n)}(0)$，是非常麻烦的。然而此前得到了$y = \arctan x$的泰勒多项式(45)，利用式(45)我们可以计算$y = \arctan x$在$x = 0$的高阶导数

$$\frac{y^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0, & n\text{是偶数}, \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}, & n\text{是奇数}. \end{cases} \tag{49}$$

由此计算出

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n\text{是偶数}, \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)!}, & n\text{是奇数}. \end{cases} \tag{50}$$

另一方面，形如$y = \frac{1}{1+x+x^2}$的各阶导数$y^{(m)}\left(-\frac{1}{2}\right)$，使用常规的求导方法很难计算。如果利用泰勒公式，这一问题就非常简单。由式(48)，当$m = 2n$时$\frac{f^{(m)}(-\frac{1}{2})}{m!} = (-1)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m}{2}+1}$，因此$f^{(m)}(-\frac{1}{2}) = (-1)^{\frac{m}{2}}m!\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m}{2}+1}$；当$m = 2n+1$时有$\frac{f^{(m)}(-\frac{1}{2})}{m!} = 0$，因此$f^{(m)}(-\frac{1}{2}) = 0$。

作为练习，读者可以自行计算上述所有求局部泰勒公式习题中对应的高阶导函数函数值$y^{(n)}(x_0)$。

计算极限

泰勒公式还可以用于计算$\frac{0}{0}$型不定式极限，由于在$x = 0$处的马克劳林公式是我们熟悉的，我们一般对$x \to 0$的极限考虑使用泰勒公式。一般地，我们假设$\frac{0}{0}$型极限具有如下形式

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{51}$$

其中$P(x)$和$Q(x)$都是无穷小量。使用泰勒公式计算极限(51)的本质，**是将$P(x)$和$Q(x)$都写成$x = 0$处的局部泰勒公式的形式**，特别注意我们只需写出了泰勒多项式最低次非零项，将更高阶的项都放在余项里：

$$P(x) = a_n x^n + o\left(x^n\right), Q(x) = b_m x^m + o\left(x^m\right), x \to 0, \tag{52}$$

其中n和m都是正整数，分别代表了无穷小量$P(x)$和$Q(x)$的阶，换言之

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{a_n x^n+o\left(x^n\right)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\left(a_n+o(1)\right)=a_n, \tag{53}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{Q(x)}{x^m}=\lim_{x\to 0}\frac{b_m x^n+o\left(x^m\right)}{x^m}=\lim_{x\to 0}\left(b_m+o(1)\right)=b_m, \tag{54}$$

即$P(x)$是和x^n同阶的无穷小量，而$Q(x)$是和x^m同阶的无穷小量。当我们写出(52)的形式后，我们就可以通过泰勒公式的信息计算极限I：

1.如果$m=n$，说明$P(x)$和$Q(x)$是同阶的无穷小量，因此

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{a_n x^n+o\left(x^n\right)}{b_m x^m+o\left(x^m\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{a_n+o(1)}{b_m+o(1)}=\frac{a_n}{b_m}. \tag{55}$$

2.如果$m<n$，说明说明$P(x)$是比$Q(x)$是高阶的无穷小量，所以$I=0$。

3.如果$m>n$，说明说明$P(x)$是比$Q(x)$是低阶的无穷小量，所以$I=\infty$。

我们指出，**极限泰勒公式法本质是比较高阶无穷小量的展开式系数**，我们给出使用泰勒公式计算函数极限的一般步骤：

1.将待求极限转化为$x\to 0$处的$\frac{0}{0}$极限，形如式(51)。

2.分别写出$P(x)$和$Q(x)$的马克劳林公式，只保留泰勒多项式最低次非零项，形如式(52)。注意由于我们只需要泰勒多项式的最低次非零项，所以可以只给出对$P(x)$和$Q(x)$的部分泰勒展开。

3.根据$P(x)$和$Q(x)$的马克劳林公式计算极限。

我们指出，由于泰勒公式是一定可以计算的，所以泰勒公式可以解决几乎所有形如式(51)的极限。但是必须说明，由于写出$P(x)$和$Q(x)$的马克劳林公式的过程常常非常复杂抽象，因此对于自身计算能力不够自信的读者建议谨慎使用泰勒公式法算极限。

我们以下述例题为例：

例 11. 计算极限$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$。

Proof. 首先通分得到$\frac{0}{0}$型不定式

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-x-1}{x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}. \tag{56}$$

分别写出分子和分母的马克劳林公式

$$\mathrm{e}^x-x-1 = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)-(x+1)=\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right). \tag{57}$$

$$x\left(\mathrm{e}^x-1\right) = x\left(x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)=x^2+\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)=x^2+o\left(x^2\right). \tag{58}$$

我们指出，像式(58)这样，起初对e^x展开了过多次数的马克劳林公式，其实并不会影响计算。我们只需要在写出$x\left(\mathrm{e}^x-1\right)$时只保留二次泰勒多项式和余项$o\left(x^2\right)$即可，三次泰勒多项式$\frac{x^3}{2}$塞进余项即可。

根据上述分析，分子e^x-x-1和分母$x\left(\mathrm{e}^x-1\right)$都是二阶无穷小量，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-x-1}{x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)}=\frac{1}{2}. \tag{59}$$

□

下面的例题计算量更大，且结合了等价无穷小的想法简化计算。建议读者通过下面的例题熟悉泰勒公式法算极限的计算流程，尤其是对$\sin x$和$\mathrm{e}^{\sin x}$，展开多少次的泰勒公式是值得仔细研究的：

例 12. 用泰勒公式计算极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\mathrm{e}^x-1)-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-1\right)}{\sin^4(3x)}$。

Proof. 用等价无穷小关系$\sin(3x)\sim 3x$，化简极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-1\right)}{\sin^4(3x)}=\frac{1}{81}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-1\right)}{x^4}. \tag{60}$$

接下来我们计算$\frac{0}{0}$极限$\frac{\sin(\mathrm{e}^x-1)-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-1\right)}{x^4}$，我们只需对分子$\sin\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-1\right)$做泰勒展开。考虑到分子$x^4$是四阶无穷小量，我们至少要讲分子的两项$\sin\left(\mathrm{e}^x-1\right)$和$\mathrm{e}^{\sin x}-1$都展开到四次才可以，这也是我们之所以在展开时始终选择$o\left(x^4\right)$作为余项的原因：由于$\sin x$是无穷小量，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\sin x}-1\\
=\;&\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{6}+\frac{\sin^4 x}{24}+o(\sin^4 x)\text{（注意到}o(x^4)=o(\sin^4 x)\text{）}\\
=\;&\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^2)\right)^2}{2}+\frac{\left(x+o(x^2)\right)^3}{6}+\frac{\left(x+o(x^2)\right)^4}{24}+o(x^4)\\
=\;&\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{6}\right)+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\\
=\;&x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4).
\end{aligned} \tag{61}$$

另一方面e^x-1也是无穷小量

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\mathrm{e}^x-1\right)\\
=\;&\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^x-1\right)^3+o\left(\left(\mathrm{e}^x-1\right)^4\right)\text{（注意到}o(x^4)=o\left(\left(\mathrm{e}^x-1\right)^4\right)\text{）}\\
=\;&\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^3+o(x^4)\\
=\;&\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)-\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{4}\right)+o(x^4)\\
=\;&x+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^4}{24}+o(x^4).
\end{aligned} \tag{62}$$

由此写出分子的四次泰勒公式

$$\begin{aligned}\sin\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-1\right) &= \left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)\\ &= -\frac{x^4}{12}+o(x^4),\end{aligned}\tag{63}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-1\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}\tag{64}$$

最终本题答案为$-\frac{1}{972}$。 □

带拉格朗日余项的泰勒公式与近似估计

我们回到泰勒公式的“初心”，即用泰勒多项式$P_n^T(x)$（定义于式(18)）近似给定函数f。由于局部泰勒公式仅能在$x=x_0$的一个邻域里以极限形式给出近似

$$e_n(x)=f(x)-P_n^T(x)=o\left((x-x_0)^n\right),\quad x\to 0.\tag{65}$$

但是局部泰勒公式有下述两个缺点

1.给不出误差函数$e_n(x)$的具体表达式。

2.由于泰勒公式仅在$x\to x_0$极限意义下成立，不能在整个区间里给出等式的结论。

带拉格朗日余项的泰勒公式完美解决了上述两个问题，但是自然我们需要对f的光滑性提出更高的要求：如果f在闭区间$[a,b]$具有$n+1$阶导函数，任取$x_0\in(a,b)$并写出$f(x)$在$x=x_0$处的n次泰勒多项式$P_n^T(x)$如式(18)，那么误差函数$e_n(x)=f(x)-P_n^T(x)$的表达式为

$$e_n(x)=f(x)-P_n^T(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\tag{66}$$

其中ξ是依赖x的参数，其值介于x与x_0之间。式(66)右侧被称为**拉格朗日余项**，在$x=x_0$带拉格朗日余项的泰勒公式形如

$$f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\tag{67}$$

即将原本局部泰勒公式的皮亚诺余项替换为拉格朗日余项。

我们指出，如果f的$n+1$阶导数有界，拉格朗日余项有

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=o\left((x-x_0)^n\right),\, x\to x_0,\tag{68}$$

此时带拉格朗日余项的泰勒公式是比带皮亚诺余项的泰勒公式更强的结论。实际上，局部泰勒公式只需要f在$x=x_0$一点n阶可导就可以推，而拉格朗日余项的泰勒公式则要

求很高：需要f在整个区间$[a,b]$都具有$n+1$阶导函数。这也是写出误差函数具体表达式的必然代价。

带拉格朗日余项的泰勒公式最大的应用是近似计算。我们希望用泰勒多项式近似正弦函数$\sin x$在开区间$(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$上各点的函数值，并希望泰勒多项式各个函数值与正弦函数的差距真正达到最小。我们考虑$\sin x$在$x_0=0$处的带拉格朗日余项的泰勒公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \tag{69}$$

其中ξ是介于x与x_0之间的参数。如果用泰勒多项式的函数值$P_{2n}^T(x)$代替$\sin x$，他们之间的误差是

$$\left|\sin x - P_{2n}^T(x)\right| = \left|\frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right| \le \frac{1}{(2n+1)!}, \tag{70}$$

其中应用了$|\cos\xi|\le 1$和$x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$。因此，只要取$n$足够大，就可以使得$P_{2n}^T(x)$更好地近似$\sin x$，而$P_{2n}^T(x)$是多项式，其值适合计算机计算，这也是计算机计算三角函数函数值的方法。例如，课本上取$n=11$，即22次泰勒多项式$P_{22}^T(x)$对$\sin x$的近似可以达到10^{-11}量级。对于解题来说，通过高阶导数的极值可以有效估计拉格朗日余项的范围。

带拉格朗日余项的泰勒公式的另一个主要应用是在证明题中研究函数f与其高阶导数之间的性质（一般证明题都有限使用带拉格朗日余项的泰勒公式而不是局部泰勒公式），我们来看下面的问题：

例 13. 设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$二阶可导，如果函数$f(x)$和$f''(x)$在$\mathbb{R}$都有界，那么函数$f'(x)$也有界。

Proof. 我们首先设存在正实数M_0,M_2是f和f''的界

$$|f(x)| < M_0, \quad |f''(x)| < M_2. \tag{71}$$

任取$x\in\mathbb{R}$，我们写出$f(x+1)$和$f(x-1)$在x处带拉格朗日余项的二阶泰勒公式：

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1), \tag{72}$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2). \tag{73}$$

其中$\xi_1\in(0,x)$以及$\xi_2\in(x,1)$。将两式相减，可以用f和f''表出f'：

$$f'(x) = \frac{f(x+1)-f(x-1)}{2} - \frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{4}. \tag{74}$$

由三角不等式

$$\begin{aligned}|f'(x)| &\le \frac{|f(x+1)|+|f(x-1)|}{2} + \frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{4} \\ &\le M_0 + \frac{M_2}{2}. \end{aligned} \tag{75}$$

由于上述估计可以对任意$x\in\mathbb{R}$进行，所以f'有界。 □

2 习题

2.1 扩展题概览

扩展延伸题部分难度较大，建议根据题目内容选择性阅读。

- 扩展习题1：中等难度，洛必达法则的灵活应用。
- 扩展习题2：中等难度，泰勒公式算极限的灵活应用。
- 扩展习题3：中等难度，特殊的局部泰勒公式计算方法。
- 扩展习题4：中等难度，洛必达法则在证明题的使用，有易错点。
- 扩展习题5：困难难度，洛必达法则在证明题的使用。
- 扩展习题6：中等难度，拉格朗日余项的泰勒公式在证明题的使用。
- 扩展习题7：中等难度，拉格朗日余项的泰勒公式在证明题的使用。
- 扩展补充题1：中等难度，极限的灵活计算
- 扩展补充题2：简单难度，利用公式计算局部泰勒公式并求高阶导数。
- 扩展补充题3：困难难度，泰勒多项式的最佳逼近定理。
- 扩展补充题4：困难难度，函数性质综合题。

2.2 扩展习题

题 1. 用洛必达法则计算下列极限：
1.$\lim_{n\to\infty} n\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$。
2.$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$。
3. $\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}$

分析：这三个问题分别是$\infty\cdot 0, \infty-\infty, \infty^0$的不定式，描述了洛必达法则在三个不同场景的应用细节和注意事项：第一问说明，如需对序列极限使用洛必达法则，必须转化为函数极限；第二问则体现了$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$导数简化的重要性，体现了在反复使用洛必达法则中简化计算量的诸多技巧；第三问则考虑了含变限积分的不定式使用洛必达法则的技巧。上述每一道题目，在使用洛必达法则之前，都必须尽可能通过化简减小计算量。

Proof. **1.**根据函数极限与序列极限关系的归结定理，取$x=\frac{1}{n}$有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}. \tag{76}$$

极限$\lim_{x\to 0+0}\frac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$是$\frac{0}{0}$不定式，我们用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{-(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}}{1}=-\mathrm{e}\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right), \tag{77}$$

第二个等号使用极限$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$。接着处理$\frac{0}{0}$型不定式$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$，部分同学想通分去除繁分式，这样的做法是不明智的，因为如果同分将得到形如$(x+1)\ln(1+x)$的项，其导数比直接对$\ln(1+x)$求导更复杂。我们直接用两次洛必达法则计算

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+x)^2}\right)=-\frac{1}{2}. \tag{78}$$

由此本题答案为$\frac{\mathrm{e}}{2}$。

2.极限$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$是$\infty-\infty$型不定式，可以直接通分计算

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x)}. \tag{79}$$

虽然极限$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x)}$是$\frac{0}{0}$型不定式，但是直接使用洛必达法则的计算量是不能承受的。我们首先使用等价无穷小的技巧有$x\sim\ln(1+x)$。另一方面注意到$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，由此结合等价无穷小和洛必达法则

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\text{（等价无穷小）}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\text{（洛必达法则）}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}\text{（洛必达法则后对数项全部消失）}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{-1+0}{1+1}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{80}$$

对于本题的解题技巧，我们总结目标是通过反复使用洛必达法则是难以处理的对数项$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$消失，由于直接对对数的积项$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x)$求导非常

复杂，由此我们首先进行了一步等价无穷小代换。另一方面，当极限计算进行到第三行时，我们并没有贸然对繁分式$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$进行通分，因为单独存在的项$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$的导数很简单，但是如果乘上了别的项求导就会很复杂。这里部分熟练的同学可能可以使用如下的等价无穷小

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left[1+\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)\right]\sim x+\sqrt{1+x^2}-1. \tag{81}$$

由此可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)}. \tag{82}$$

模仿式(80)对式(82)进行两次洛必达法则也可以计算出极限，但是计算量要比给出的方法更大些。

3.本题为∞^0型不定式，使用取对数的方法然后使用洛必达法则，使用洛必达法则的目标是通过求导处理掉变限积分的部分：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}\\
=\ &\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{\ln\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)}{x^2}\right)=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)}{x^2}\right)\\
=\ &\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{-1}}{2x}\right)\text{（使用一次洛必达法则）}\\
=\ &\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}(2x)^{-1}}{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}\right)\text{（变限积分求导简单，因此将变限积分单独放在分母）}\\
=\ &\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{2\mathrm{e}^{x^2}}\right)\text{（使用一次洛必达法则）}\\
=\ &\mathrm{e}.
\end{aligned} \tag{83}$$

这里着重强调第三个等号的化简，实际上我们做出了代数变形

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}(2x)^{-1}}{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}. \tag{84}$$

相比对左式直接使用洛必达法则，右式将变限积分$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$单独写在分母，经过一次洛必达法则运算就可以消去积分号；相较而言，对左式使用一次洛必达法则并不能消去积分号。使用洛必达法则时，必须自信思考对什么样的式子使用洛必达法则，可以简化运算。 □

题 **2.** 用泰勒公式计算下列极限

1. $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{4}}(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x})$。

2.2021年高等数学B期末考试题. $\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)^4}{\sqrt{1-\frac{x\sin x}{2}}-\sqrt{\cos x}}$。

Proof. **1.**我们首先换元$y=\frac{1}{x}$得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{4}}(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x}) &= \lim_{y\to 0+0} y^{-\frac{7}{4}}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{y}+1}+\sqrt[4]{\frac{1}{y}-1}-2\sqrt[4]{\frac{1}{y}}\right)\\ &= \lim_{y\to 0+0}\frac{\sqrt[4]{y+1}+\sqrt[4]{1-y}-2}{y^2}. \end{aligned}\tag{85}$$

写出分子的局部泰勒公式，余项$o(y^2)$:

$$\sqrt[4]{y+1}=1+\frac{y}{4}-\frac{3y^2}{32}+o(y^2),\tag{86}$$

以及

$$\sqrt[4]{1-y}=1-\frac{y}{4}-\frac{3y^2}{32}+o(y^2).\tag{87}$$

由此

$$\lim_{y\to 0+0}\frac{\sqrt[4]{y+1}+\sqrt[4]{1-y}-2}{y^2}=\lim_{y\to 0+0}\frac{-\frac{3}{16}y^2+o(y^2)}{y^2}=-\frac{3}{16}.\tag{88}$$

2.利用等价无穷小关系$x\sim\tan x$有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)^4}{\sqrt{1-\frac{x\sin x}{2}}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sqrt{1-\frac{x\sin x}{2}}-\sqrt{\cos x}}.\tag{89}$$

这一步化简非常有必要，因为$\tan x$的马克劳林公式很难计算。分子的化简我们给出直接计算和根式变形两种方式:

直接计算 我们需要对分子的两项都展开四次泰勒公式，首先

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{x\sin x}{2}} &= \left[1+\left(-\frac{x\sin x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= 1-\frac{x\sin x}{4}-\frac{x^2\sin^2 x}{32}+o\left(x^2\sin^2 x\right)\ \text{（注意}x\sim\sin x\text{）}\\ &= 1-\frac{x}{4}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)-\frac{x^2}{32}\left(x+o(x^2)\right)^2+o(x^4)\\ &= 1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{96}+o(x^4), \end{aligned}\tag{90}$$

另一方面，$\sqrt{\cos x}$不能直接展开，我们写作$\sqrt{1+(\cos x-1)}$，其中$\cos x-1$是无穷小量:

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos x} &= [1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{2}}\\ &= 1-\frac{\cos x-1}{2}+\frac{(\cos x-1)^2}{8}+o\left((\cos x-1)^2\right)\ \text{（注意}\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}\text{）}\\ &= 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o(x^4)\\ &= 1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+o(x^4). \end{aligned}\tag{91}$$

代入极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sqrt{1-\frac{x\sin x}{2}}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\frac{x^4}{48}+o(x^4)}=48. \tag{92}$$

根式有理化 适当的变形可以大大简化泰勒公式的计算

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sqrt{1-\frac{x\sin x}{2}}-\sqrt{\cos x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(\sqrt{1-\frac{x\sin x}{2}}+\sqrt{\cos x}\right)}{1-\frac{x\sin x}{2}-\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{1-\frac{x\sin x}{2}-\cos x}.\end{aligned} \tag{93}$$

注意到

$$1-\frac{x\sin x}{2}-\cos x=-\frac{x}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)=\frac{x^4}{24}+o(x^4). \tag{94}$$

代入可以得到相同的答案

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{1-\frac{x\sin x}{2}-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{\frac{x^4}{24}+o(x^4)}=48. \tag{95}$$

□

题 3. 写出函数$y=\frac{1}{1+x+x^2}$，写出y在$x=0$处的局部泰勒公式，并由此计算高阶导数$y^{(m)}(0)$，其中$m\in\mathbb{N}^*$。

分析：我们之前已经写出了$y=\frac{1}{1+x+x^2}$在$x=-\frac{1}{2}$的泰勒公式，计算$y=\frac{1}{1+x+x^2}$在$x=0$的泰勒公式需要更具想象力的变形。

Proof. 首先考虑$x=0$处的泰勒公式，进行代数变形

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{1-x^3}, \tag{96}$$

结合$\frac{1}{1-x}$的泰勒公式，可以写出$\frac{1}{1-x^3}$的泰勒公式

$$\frac{1}{1-x^3}=1+x^3+x^6+\cdots+x^{3n}+o(x^{3n+2}), \tag{97}$$

由此

$$\begin{aligned}(1-x)\cdot\frac{1}{1-x^3} &= (1-x)\left(1+x^3+x^6+\cdots+x^{3n}+o(x^{3n+2})\right)\\ &= 1-x+x^3-x^4+\cdots+x^{3n}-x^{3n+1}+o(x^{3n+2}).\end{aligned} \tag{98}$$

根据泰勒公式的系数可以计算高阶导数：当$m=3n$时有$\frac{f^{(m)}(0)}{m!}=1$，因此$f^{(m)}(0)=m!$；当$m=3n+1$时有$\frac{f^{(m)}(0)}{m!}=-1$，因此$f^{(m)}(0)=-m!$；当$m=3n+2$时有$\frac{f^{(m)}(0)}{m!}=0$，因此$f^{(m)}(0)=0$。 □

题 4. 设函数$f(x)$在$x=a$处二阶可导，求证:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a) \tag{99}$$

分析：由于本题的极限也是一个不定式，我们也可以尝试使用洛必达法则。但是需要额外关注本题的易错解法。

Proof. 直接用洛必达法则

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} \\
= & \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}\text{（使用一次洛必达法则）} \\
= & \frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}\right)\text{（凑出二阶导数定义的形式）} \\
= & f''(a).
\end{aligned} \tag{100}$$

值得注意的是，本题我们只给出了$f(x)$在点$x=a$一点的二阶可导性，而$x=a$的邻域内f的二阶导数不一定存在。由此在分析极限$\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$时，不能对极限的分子$f'(a+h)-f'(a-h)$时不能用拉格朗日中值定理$f'(a+h)-f'(a-h)=2hf''(\xi)$，因为$f'$在区间$(a-h,a+h)$可导的条件并没有给出。 □

题 5. 设函数$f(x)$是$(0,+\infty)$的有界可导函数，且存在$a>0$使得$\lim_{x\to\infty}(af(x)-f'(x))$存在，求证$\lim_{x\to+\infty}f(x)$存在。

分析：洛必达法则在证明题中的主要作用，是建立f相关的极限与f'相关的极限之间的关系。为了使用题目中条件$\lim_{x\to\infty}(af(x)-f'(x))$存在，我们构造辅助函数。

Proof. 构造辅助函数$F(x)=\mathrm{e}^{-ax}f(x)$和$G(x)=\mathrm{e}^{-ax}$，由于函数$f$有界，当$x\to+\infty$时$F(x)$和$G(x)$都是无穷小量。且我们有极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-ax}(af(x)-f'(x))}{-a\mathrm{e}^{-ax}}=\frac{1}{a}\lim_{x\to\infty}(af(x)-f'(x)). \tag{101}$$

由于极限$\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{G'(x)}$收敛，用洛必达法则有

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{G'(x)}, \tag{102}$$

也是收敛的极限。 □

题 6. 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，满足$f(0)=f(1)$，如果$|f''(x)|\le 2$在$[0,1]$成立，那么$|f'(x)|\le 1$在$[0,1]$成立。

分析：本题是标准的使用拉格朗日余项的泰勒公式解答证明题。通过泰勒公式我们可以建立f, f', f''的关系。由于我们最了解f在$0, 1$两点的信息，我们在任意点$x \in (0,1)$写出$f(0)$和$f(1)$的带拉格朗日余项泰勒公式。

Proof. 设$x \in (0,1)$，在x处写出$f(0)$和$f(1)$的带拉格朗日余项泰勒公式

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x)^2, \tag{103}$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2, \tag{104}$$

其中$\xi_1 \in (0,x)$以及$\xi_2 \in (x,1)$。由于$f(0) = f(1)$，我们将上述两个式子相减

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2\right], \tag{105}$$

根据条件，f''在任一点的函数值的绝对值都不大于2，所以

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq \frac{x^2}{2}|f''(\xi_1)| + \frac{(1-x)^2}{2}|f''(\xi_2)| \\ &\leq x^2 + (1-x)^2 \leq 1. \end{aligned} \tag{106}$$

□

题 7. 设函数$f(x)$在a某个邻域二阶导连续，根据拉格朗日中值定理

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a + h\theta(h)), \tag{107}$$

其中$\theta(h) \in (0,1)$是依赖h的参数。求证$\lim_{h\to 0}\theta(h) = \frac{1}{2}$。

分析：仅从拉格朗日中值定理，我们只知道$\theta(h)$存在，并不知道$\theta(h)$的值以及关于$\theta(h)$的其他信息。如果我们将条件由f一阶可导（拉格朗日中值定理的条件）加强到二阶课导（带拉格朗日余项的泰勒公式的条件），将可以得到关于$\theta(h)$的极限信息。

Proof. 我们写出点a处带Lagrange余项的二次泰勒公式

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a + \xi(h)), \tag{108}$$

其中$\xi(h) \in (0,1)$是依赖h的参数。代入式(107)并消去h得

$$f'(a + \theta(h)h) - f'(a) = \frac{h}{2}f''(a + \xi(h)). \tag{109}$$

根据二阶导数的定义

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta(h)h) - f'(a)}{h\theta(h)} = f''(a). \tag{110}$$

代入式(109)得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+\xi(h))}{2\theta(h)} = f''(a). \tag{111}$$

由于二阶导连续，同时$a < a + \xi(h)h < a + h$，使用

$$\lim_{h\to 0} f''(a + \xi(h)) = f''(a). \tag{112}$$

结合式(111)得

$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \frac{1}{2}. \tag{113}$$

□

2.3 扩展补充题

补 1. 计算下列极限

1. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\mathrm{e}^n}$。

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$。

补 2. 写出下述函数的马克劳林公式，然后计算$y^{(n)}(0)$：

1.2021年高等数学B期末考试题. $y = \frac{1-2x+5x^2}{(1-2x)(1+x^2)}$。

2. $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$。

补 3. 设函数f在邻域$(x_0 - r, x_0 + r)$有定义，在$x = x_0$处n阶可导，$P_n^T(x)$是$f(x)$在$x = x_0$处的n次泰勒多项式。任取另一个n次多项式$P_n(x)$，证明存在依赖$P_n(x)$选取的数$\delta \in (0, r)$，使得$|f(x) - P_n(x)| \le |f(x) - P_n(x)|$对一切$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$成立。

补 4. 设函数$f(x)$在$[a, +\infty)$可导，且存在有限极限$\lim_{x\to\infty} f(x)$，回答下列问题

1. 举反例说明$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$不一定总成立。

2. 若$f(x)$二阶可导，且$f''(x)$在$[a, +\infty)$有界，求证：$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$。