曲线积分

谢彦桐
北京大学数学科学学院

March 19, 2022

1 知识内容理解

本讲义包含课本8.1节到8.3节的内容，前半部分将两类曲线积分的定义和计算，后半部分讲曲线积分的路径无关性和Green公式。

1.1 曲线积分的定义和计算

曲线积分的定义

之前我们讨论过定积分和重积分，其三个要素是“积分区域”、“被积函数”和“积分微元”，不同积分的区别也呈现在上述三要素，曲线积分也是一样。另一方面，曲线积分也遵循积分定义的三步骤：“分”，“积”和“取极限”。我们学习曲线积分的定义也要从上述积分的异同点出发，例如表格里总结了三类积分的积分区域和被积函数。

接下来我们从三步骤介绍两类曲线积分的定义，我们皆以平面曲线L作为积分区域介绍，空间曲线的情形是非常类似的。首先是第一型曲线积分，我们考虑二元函数$f(x,y)$，曲线积分的定义分为三步

1.分 将曲线L分为若干小段L_i。

2.积 在每一小段取点(x_i,y_i)，求和$f(x_i,y_i)\Delta s_i$，其中Δs_i是曲线小段L_i的长度。

积分种类	积分区域	被积函数
二重积分	平面区域	两个自变量一个因变量的函数
第一型曲线积分	平面或空间曲线	两或三个自变量一个因变量的函数
第二型曲线积分	平面或空间曲线	两或三个自变量两个因变量的向量值函数

3.取极限 不断加细曲线段划分，使得每一段曲线长度Δs_i都趋近于0，和式极限定义为第一型曲线积分

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0} f(x_i,y_i)\Delta s_i, \tag{1}$$

其中$\lambda = \max_i \Delta s_i$是曲线段长度最大者。由此第一型曲线积分的积分微元$\mathrm{d}s$也被称为弧长微元或曲线长微元。

接下来是第二型曲面积分的的定义，考虑向量值函数$\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$，即对于给定自变量$(x,y)$，像$\mathbf{F}(x,y)$不是一个数而是某向量$(P(x,y), Q(x,y))$，由此向量值函数可以看作两个二元函数的接合。我们依然考虑三步

1.分 将曲线L按某种定向分为若干小段$L_i = \widehat{A_{i-1}A_i}$。

2.积 在每一小段取点(x_i,y_i)，求和$\mathbf{F}(x_i,y_i)\cdot(\Delta x_i,\Delta y_i)$，其中符号$\cdot$指向量内积，向量$(\Delta x_i,\Delta y_i)$则代表了将曲线段$L_i$化曲为直后得到的向量即$(\Delta x_i,\Delta y_i) = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$，当小段足够小时可以看作点$(x_i,y_i)$处曲线$L$的一个方向向量（不是单位方向向量）。求和式也可以写为$\mathbf{F}(x_i,y_i)\cdot(\Delta x_i,\Delta y_i) = P(x_i,y_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\Delta y_i$，相当于向量函数$\mathbf{F}$和方向向量的内积。

3.取极限 不断加细曲线段划分，使得每一段曲线长度Δs_i都趋近于0，和式极限定义为第一型曲线积分

$$\int_L \mathbf{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\mathbf{F}(x_i,y_i)\cdot(\Delta x_i,\Delta y_i), \tag{2}$$

其中$\lambda = \max_i \Delta s_i$是曲线段长度最大者。由此第二型曲线积分的积分微元$\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$是向量值微元，被称为弧向量微元或曲线向量微元。

从定义上看，两类曲线积分的区别主要出在“积”这一步骤，第一型曲线积分的求和是函数值$f(x,y)$乘以微元$\mathrm{d}s$，第二型曲线积分的求和则是向量函数值$\mathbf{F}(x,y)$内积弧向量微元$\mathrm{d}\mathbf{r}$，所以不论哪种积分最终得到的积分值都是一个实数。两种不同的定义方式是为不同的物理对象服务的，第一型曲线积分是为了刻画曲线的线质量，如果将$f(x,y)$看作L在点(x,y)的密度，分段累加得到的积分值$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$就是曲线L的线质量；第二型曲线积分是为了刻画变力做功，如果将$\mathbf{F}(x,y)$力在点(x,y)的矢量大小（物理上称这样的向量函数为力场），分段累加得到的积分值$\int_L \mathbf{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$就是力沿曲线$L$方向的做功。

我们注意到第二型曲线积分的定义里提到了曲线的定向，第一类曲线积分则没有提及。这是因为，在定义第二型曲线积分时我们分段计算$\mathbf{F}(x_i,y_i)\cdot(\Delta x_i,\Delta y_i)$，而如果选择相反的定向向量值$(\Delta x_i,\Delta y_i) = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$是相反的。所以如果选择相反的定向计算第二型曲线积分，值是完全不同的，而第一型曲线积分的值不受定向影响。

第一型曲线积分的计算公式

计算曲线积分的第一步也是最重要的一步是得到曲线L的方程。如果得到L的方程

种类不同（如一般方程或参数方程），第一型曲线积分的计算公式也不同。我们需要根据L的方程分别讨论，考虑第一型曲线积分$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$：

1.L的方程是一般方程$y=y(x)$，自变量的取值范围是$a<x<b$，曲线积分的计算公式是

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

公式的直观理解是，考虑L在x轴上投影范围(a,b)，我们在计算曲线积分$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$时曲线微元$\mathrm{d}s$的长度是大于微元$\mathrm{d}x$的，所以要乘以系数$\sqrt{1+[y'(x)]^2}$。

2.L的方程是参数方程$L:\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases}$，自变量的取值范围是$\alpha<t<\beta$，曲线积分的计算公式是

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t. \tag{4}$$

这里我们指出，一些曲线如环路是不能写出一般方程只能写出参数方程的。例如单位圆是环路，其方程$x^2+y^2=1$，写成一般方程$y=\pm\sqrt{1-x^2}$因变量不唯一，所以这样的一般方程是错误的。我们只能写出其参数方程。此外，空间曲线的曲线积分与平面曲线的曲线积分公式方程类似，唯一的区别是空间曲线只能写出参数方程而写不出一般方程，所以我们只能用参数方程的曲线积分公式计算空间曲线的曲线积分。

综上所述，计算第一型曲线积分的步骤分为两步：写出L的方程（一般方程或参数方程）；计算定积分的值。我们接下来看两个例题，第一个例题是标准的曲线积分计算题并给出了曲线的方程，第二个例题则需要我们分析出曲线的方程。

例 1. 考虑摆线$L:x=t-\sin t,y=1-\cos t$，定义域$t\in[0,\pi]$，计算$I=\int_L x\mathrm{d}s$。

分析：本题是标准的曲线积分计算问题，其难点在于定积分的计算涉及三角函数技巧。

Proof. 我们很容易得到

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\mathrm{d}x, \tag{5}$$

由此写出曲线积分的化简形式

$$I=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\mathrm{d}t. \tag{6}$$

初次见面可能会觉得上述积分的根号项难以处理，实际上

$$(1-\cos t)^2+\sin^2 t=2(1-\cos t)=4\sin^2\frac{t}{2}. \tag{7}$$

所以得到

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t\text{（换元}t=2u\text{然后用倍角公式）} \\
&= 8\int_0^{\pi}(u-\sin u\cos u)\sin u\mathrm{d}u \\
&= 8\left(\sin u-u\cos u+\frac{1}{3}\sin^3 u\right)\Bigg|_{u=0}^{u=\pi}=8\pi. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

□

例 2. 计算曲线积分$\oint_L x^2\mathrm{d}s$，其中L是平面$x+y+z=0$与三维空间的单位球的交线。

分析：本题的难点在于空间曲线L的方程并没有直接给出，需要自己计算参数方程，再计算积分。获取参数方程的方法是通过联立得到的x与y的关系式，通过配方的方法三角换元。

Proof. 这是一个空间曲线的第一型曲线积分，我们首先写出曲线的方程。联立单位球和平面$x+y+z=0$得到

$$x^2+y^2+xy=\frac{1}{2}. \qquad (9)$$

为了写出空间曲线的方程，我们应该首先用一个参数写出x,y的关系。直接选取x作为参数方程的参数会因为难以写出y而计算量太大，我们考虑变形

$$\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=\frac{1}{2}. \qquad (10)$$

由此我们可以将两个平方式的底数用正弦函数和余弦函数表示：

$$\frac{1}{2}x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta. \qquad (11)$$

因此写出x,y关于θ的表达式，带回$x+y+z=0$还可以得到z关于θ的表达式：

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta, \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{6}}{6}\sin\theta, \\ z=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{6}}{6}\sin\theta. \end{cases} \qquad (12)$$

这里注意自变量θ的范围应该取遍$[0,2\pi]$。然后分别求导有

$$\begin{cases} x'(\theta)=\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\theta, \\ y'(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{6}}{6}\cos\theta, \\ z(\theta)'=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{6}}{6}\cos\theta. \end{cases} \qquad (13)$$

然后带入曲线积分公式

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_L x^2 \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\sin^2\theta\sqrt{\frac{2}{3}\cos^2\theta+\sin^2\theta+\frac{1}{3}\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{2}{3}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3}. \quad (14)
\end{aligned}
$$

□

第二型曲线积分的计算公式

我们依然要根据曲线L方程讨论第二型曲线积分的计算公式，值得一提的是由于第二型曲线积分有定向的概念，所以我们写出的方程必须是符合题设要求的定向的曲线积分方程。考虑第二型曲面积分$\int_L \mathbf{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$:

1.L的方程是一般方程$y=y(x)$，自变量的取值范围是$a<x<b$，曲线积分的计算公式是

$$\int_L \mathbf{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \left[P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)\right]\mathrm{d}x. \quad (15)$$

2.L的方程是参数方程$L:\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases}$，自变量的取值范围是$\alpha<t<\beta$，曲线积分的计算公式是

$$\int_L \mathbf{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \left[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\right]\mathrm{d}t. \quad (16)$$

下面我们看一道第二型曲线积分的综合计算题，需要我们自己找的曲线L的参数方程：

例 3. 计算曲线积分$I=\oint_L y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，其中$L$是曲面$x^2+y^2=x$与三维空间的单位球的交线在$z\geq 0$的部分，方向是从$x$轴正向往负向看的逆时针方向。

分析：本题是有难度的综合计算题，在曲线形状的想象、曲线方程的获取和曲线积分的计算上都有难度。特别指出，即便本题的曲线L关于XoZ坐标平面对称，这不意味着可以将积分分为XoZ平面两侧的两段使用对称性计算积分，因为第二型曲线积分累加的不是函数值而是向量函数和方向向量的内积，内积的对称性是不直观的。

Proof. 为了得到曲线L的参数方程，我们将单位球面和柱面$x^2+y^2=x$的方程都写成柱坐标的形式：

$$\begin{cases} r^2+z^2=1, \\ r=\cos\theta,. \end{cases} \quad (17)$$

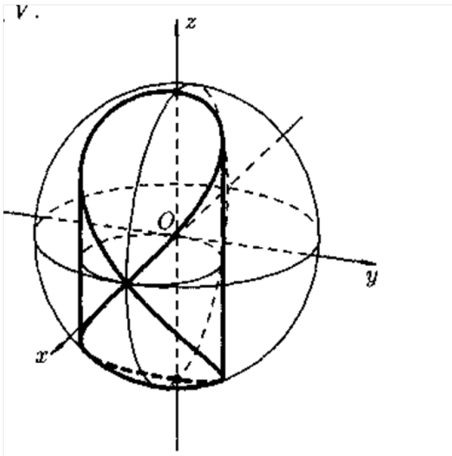

图 1: 例题3示意图。

由此我们可以通过θ表示出$r = \cos\theta$和$z = |\sin\theta|$。如果我们想写出自变量(x, y, z)关于θ的参数方程，还需要将将(x, y, z)用柱坐标自变量(r, θ, z)表示出来：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = \cos^2\theta, \\ y = r\sin\theta = \cos\theta\sin\theta, \\ z = |\sin\theta|. \end{cases} \tag{18}$$

结合示意图可以得到参数θ即柱坐标角的取值范围$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。

为了计算曲线积分，我们需要对参数方程(18)求导。而考虑到z关于θ的表达式带有绝对值，我们需要分θ的符号计算导数：

$$\begin{cases} x'(\theta) = -\sin 2\theta, \\ y'(\theta) = \cos 2\theta, \\ z'(\theta) = \cos\theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \begin{cases} x'(\theta) = -\sin 2\theta, \\ y'(\theta) = \cos 2\theta, \\ z'(\theta) = -\cos\theta, \end{cases} \quad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]. \tag{19}$$

代入公式计算第二型曲线积分

$$\begin{aligned} I &= \oint_L y^2 \mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}y + x^2 \mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos^2\theta\sin^2\theta\sin 2\theta + \sin^2\theta\cos 2\theta + \cos^5\theta\right) \mathrm{d}\theta \\ &\quad + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(-\cos^2\theta\sin^2\theta\sin 2\theta + \sin^2\theta\cos 2\theta - \cos^5\theta\right) \mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos 2\theta \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2\theta - 2\sin^4\theta\right) \mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned} \tag{20}$$

特别注意，式(20)的第三个等号是利用了定积分的对称性。注意到$\cos^2\theta\sin^2\theta\sin 2\theta$是

奇函数，所以

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin^2\theta\sin 2\theta \mathrm{d}\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2\theta\sin^2\theta\sin 2\theta \mathrm{d}\theta = 0. \tag{21}$$

现在我们回过头看，L确实是关于XoZ坐标平面对称的，但是这一对称并不能保证第二型曲线积分所累积的内积$(y^2, z^2, x^2)\cdot(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$是相反的，因为关于$XoZ$坐标平面对称的的两个点$A_1 : (x_0, y_0, z_0)$和$A_2 : (x_0, -y_0, z_0)$的方向向量只有$x$分量$\mathrm{d}x$和$z$分量$\mathrm{d}z$是相反的，方向向量的$y$分量$\mathrm{d}y$在对称点相同，因此内积加和中项$y^2\mathrm{d}x$和$x^2\mathrm{d}z$在$A_1$点和$A_2$点的值相反，分量$z^2\mathrm{d}y$在$A_1$点和$A_2$点的值相同。反映在式(20)第二行定积分的计算中，我们可以看到x和z分量的定积分是可以消去的，y分量的则不行。 □

两类曲线积分的关系

我们在定义中曾经说过，第一型曲线积分和第二型曲线积分的区别主要出在定义中“积”这一步骤，即累积的对象不同。然而两类曲线积分累积对象是可以互相转换的。在划分足够小时向量$(\Delta x_i, \Delta y_i)$代表点(x_i, y_i)处的方向向量（注意不是单位方向向量），如果用向量$\mathbf{t}$表示点(x_i, y_i)处的单位方向向量，那么

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\Delta s_i}(\Delta x_i, \Delta y_i), \tag{22}$$

其中$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$代表的是小曲线段$L_i$的长度，也是第一型曲线积分的曲线长微元。回头对第二型曲线积分累积的内积$\mathbf{F}(x_i, y_i)\cdot(\Delta x_i, \Delta y_i)$做化简

$$P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i = \mathbf{F}(x_i, y_i)\cdot(\Delta x_i, \Delta y_i) = (\mathbf{F}(x_i, y_i)\cdot\mathbf{t})\,\Delta s_i, \tag{23}$$

对于给定点(x, y)，单位方向向量$\mathbf{t}$可以看作以(x, y)为自变量的向量函数，把内积$\mathbf{F}(x, y)\cdot\mathbf{t}$看作自变量$(x, y)$二元函数，我们就可以将第二型曲线积分$\int_L \mathbf{F}(x, y)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$看作以函数$\mathbf{F}(x, y)\cdot\mathbf{t}$被积函数的第一型曲线积分：

$$\int_L \mathbf{F}(x, y)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_L (\mathbf{F}(x, y)\cdot\mathbf{t})\,\mathrm{d}s. \tag{24}$$

相较第二型曲线积分在累积过程中抽象的内积计算，第一型曲线积分是的计算是更好理解的，即累积被积函数的函数值乘以曲线长微元。我们更容易分析第一型曲线积分的对称性，第二型曲线积分的对称性可以要化作第一型曲线积分来分析，看下列例题：

例 4. 计算曲线积分$\oint_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中$L$是由四个点$(2, 0)$，$(-2, 0)$，$(0, 2)$和$(0, -2)$围成的正方形的边界的逆时针方向。

分析：本题主要介绍曲线积分的对称性方法，第二型曲线积分的对称性通常需要化成第一型曲线积分讨论比较直观。

Proof. 本题的第二型曲线积分被积向量函数为$\mathbf{F}=\left(\frac{1}{|x|+|y|},\frac{1}{|x|+|y|}\right)$，将第二型曲线积分写出第一型形式得到

$$\oint_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\oint_L \left(\frac{1}{|x|+|y|},\frac{1}{|x|+|y|}\right)\cdot \mathbf{t}\mathrm{d}s, \tag{25}$$

其中$\mathbf{t}$是L的单位方向向量。在L的不同边上$\mathbf{t}$取值不同，分别为$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

曲线上关于原点对称的两个点，其单位方向向量$\mathbf{t}$平行且方向相反，亦即这两个点的方向向量的两个分量互为相反数。而向量函数$\left(\frac{1}{|x|+|y|},\frac{1}{|x|+|y|}\right)$在关于原点对称的两个点的函数值相同，因此关于原点对称的两个点内积函数$\left(\frac{1}{|x|+|y|},\frac{1}{|x|+|y|}\right)\cdot\mathbf{t}$的函数值互为相反数。结合积分曲线关于原点的对称性，得知

$$\oint_L \left(\frac{1}{|x|+|y|},\frac{1}{|x|+|y|}\right)\cdot \mathbf{t}\mathrm{d}s=0. \tag{26}$$

□

1.2 Green公式和（二维）第二型曲线积分的路径无关

本节主要研究二维第二型曲线积分的路径无关性，Green公式是其主要工具。本节的所有内容构成一套完整的理论，理解这套理论不仅要理解核心定理，也要理解其物理动机。本节的各个例题则解释了这套理论的应用。

Green公式

Green公式是一种可以将曲线积分和二重积分互相转换的公式，在计算环路（作为某区域边界）曲线积分的值时有重要作用。Green公式的内容是：设区域D的边界L是逐段光滑的，

$$\oint_{L^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{27}$$

关于Green公式给出几点释疑：

1.Green公式的成立要求函数P和Q在区域D每一点都有定义且存在连续的偏导数。这一要求看似平平无奇，但是在后续的例题中却隐藏着陷阱。

2.这里L^+指环路型边界的正定向。正定向并不总指逆时针不一样，正向指沿着区域边界行进使得区域位于行进方向左侧的定向，对于多连通区域正定向不一定值边界的逆时针方向。

3.这里仅仅要求D是有界闭区域，没有单连通要求。部分同学容易将Green公式与后续路径无关性理论混淆，误认为Green公式需要D单连通。

下面的例题使用Green公式计算环路积分：

例 5. 计算两个曲线积分

$$I_1=\oint_{L_1}\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,\quad I_2=\oint_{L_2}\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y, \tag{28}$$

L_1是单位圆上由$(1,0)$和$(0,1)$所在劣弧确定的弓形的边界，L_2是单位圆的边界，均考虑逆时针方向。

分析：Green公式的最基本的应用，就是在计算题中实现封闭曲线第二型曲线积分和二重积分的转化。使用Green公式时，应注意其在区域D每一点是否都有定义。对于区域有奇点（无定义的点）的问题，如本题积分I_2是不能使用Green公式的。

Proof. 本题的被积函数是向量函数$\mathbf{F}(x,t)=(P(x,y),Q(x,y))=\left(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$，它满足

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \tag{29}$$

换言之$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，如果能将题目中的两个封闭曲线积分通过Green公式化成重积分将大大简化计算。

考虑D_1是由$(1,0)$和$(0,1)$所在劣弧确定的弓形，那么曲线L_1是D_1的正向边界，显然$\mathbf{F}$在D_1点点有定义且连续可微，用Green公式

$$I_1=\iint_{D_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \tag{30}$$

另一方面，考虑D_2是单位圆，曲线L_2是D_2的正向边界。然而我们不能直接在D_2用Green公式，因为D_2包括了原点，而函数$\mathbf{F}$在原点没有定义。但是结合L_2上的点满足$x^2+y^2=1$，我们可以代入简化被积函数

$$I_2=\oint_{L_2}y\mathrm{d}x+(-x)\mathrm{d}y=\iint_{D_2}-2\mathrm{d}\sigma=-2\pi. \tag{31}$$

这里第二个等号用了D_2上的Green公式，因为去除分母后向量函数$(y,-x)$在D_2上处处有定义且光滑。 □

第二型曲线积分路径无关性的条件

我们以例题5的场景作为起点讨论第二型曲线积分的路径无关性，曲线L_1和L_2的定义与例题5相同。设D_2是单位圆$x^2+y^2\le 1$，单位圆周上有两个点$A(1,0)$和$B(0,1)$，我们考虑三条连接A和B的线段：J_1是单位圆的劣弧，J_2是直线，J_3是单位圆的优弧。考

虑和例题5相同的被积函数，我们讨论三个第二型曲线积分值的关系：

$$P_1 = \oint_{J_1} \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y, \tag{32}$$

$$P_2 = \oint_{J_2} \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y, \tag{33}$$

$$P_3 = \oint_{J_2} \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y. \tag{34}$$

我们首先可以判断$P_1 = P_2$，因为曲线L_1可以看作将曲线J_1的正定向和曲线J_2的负定向拼接而成的环路，因此$I_1 = P_1 - P_2 = 0$；另一方面$P_1 \neq P_3$，因为如果把曲线L_2可以看作将曲线J_1的正定向和曲线J_3的负定向拼接而成的环路，就有$I_2 = P_2 - P_3 = -2\pi \neq 0$。这里自然就有一个问题，积分$P_1, P_2, P_3$有相同的被积函数，积分曲线也具有相同的起点和终点，为什么三个积分的值不全相同呢？

本节要讨论的就是这样具有相同被积函数，积分曲线具有相同起点和终点的第二型曲线积分，并考虑这些积分的取值何时与积分路径无关。路径无关性的讨论源于保守力做功的分析。在物理学中，有一类力被称为保守力，其特点是给定起点和终点，力沿任意路径从起点出发到终点的做功与路径无关。保守力的典型例子是重力，当我们将物体从点A移动到点B时，重力的做功仅仅与A, B两点高度差有关，与移动路径无关。第二型曲线积分的物理意义是做功，而我们所说路径积分无关的第二型曲线积分，其被积函数就对应保守力。保守力的另一个特点是可以定义势能，例如重力势能，并且可以将保守力的做功简单地写成势能的差，而我们也将会将如何利用“势能”计算路径无关的第二型曲线积分的方法。

我们考虑的第二型曲线积分是$I = \int_{\hat{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$，其中曲线$\hat{AB}$待定。首先我们严格化“路径无关性”的定义：设$D$是平面区域，**函数$P, Q$在$D$是点点有定义且连续可微**，点$A, B \in D$，称曲线积分$I = \int_{\hat{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$具有**路径无关性**，如果对于区域$D$中任意两条连接$A$和$B$的曲线$J_1, J_2$，即$J_1, J_2 \subset D$，都有

$$\int_{J_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{J_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \tag{35}$$

这里需要明确，不给出区域D我们是无法使用路径无关性的。

我们分析得到了三个路径无关性条件，它们中的一部分对区域D实际提出了要求，我们列举三个充分必要条件：

充分必要条件1 曲线积分$I = \int_{\hat{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$在$D$具有路径无关性当且仅当对$D$中任意简单逐段光滑曲线$C$（即$C \subset D$）都有

$$\oint_{C^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0, \tag{36}$$

充分必要条件2 如果额外要求D是单连通，那么曲线积分$I = \int_{\hat{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$在$D$具有路径无关性当且仅当$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$在$D$上成立。

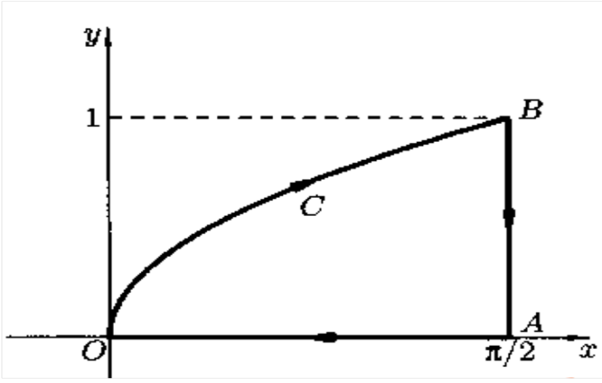

图 2: 例题6示意图

充分必要条件3 如果额外要求D是单连通，那么曲线积分$I=\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$D$具有路径无关性当且仅当存在某个原函数$u(x,y)$使得如下全微分成立$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$。

我们注意到充分必要条件2和3对区域D增设了单连通条件，充分必要条件1则没有需求。然而最适宜作为路径无关性条件的判据是条件2，因为它只需要验证P和Q的偏导数就能确定路径无关性是否存在。另一方面，条件1将路径无关性转为讨论边界的环路积分，而Green公式能将环路积分转化为关于$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$的重积分，这也是条件2的推导方法。条件3暂时难以理解，我们在下一节重点将原函数。

我们回头来看例题5，我们沿用例题5解答中的定义，用D_1代表由$(1,0)$和$(0,1)$所在劣弧确定的弓形，用D_2代表单位圆。D_1是一个单连通区域，且$P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$和$Q(x,y)=\frac{-x}{x^2+y^2}$在$D_1$点点有定义，对于路径$J_1$和$J_2$确定的曲线积分，路径无关性告诉我们$P_1=P_2$；另一方面，函数$P$和$Q$在原点没有定义，所以我们不能直接在$D_2$上讨论路径无关性而需要挖去原点，得到$D_2'=D_2/\{(0,0)\}$，$D_2'$不是单连通区域，所以即便$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$在$D_2'$成立，曲线积分在$D_2'$也不具有路径无关性，因此$P_1\neq P_3$。

路径无关性理论告诉我们两种计算曲线积分的新方法：改换路径法和原函数法。下面的例题介绍改换路径法：

例 6. 计算曲线积分$\int_L\left(2xy^3-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y$，其中$L$是抛物线$2x=\pi y^2$自原点到$(\frac{\pi}{2},1)$的部分。

分析：一般这种非常长的积分都可能是积分路径无关，即满足$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。由于$L$的路径是复杂的抛物线，我们可以选择更简单的路径计算曲线积分以降低计算量。

Proof. 首先被积函数$\mathbf{F}(x,y)=(2xy^3-y^2,1-2y\sin x+3x^2y^2)$在$\mathbb{R}^2$都可以被定义，并且

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3-y^2\cos x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)=6xy^2-2y\cos x. \tag{37}$$

由于$\mathbb{R}^2$显然是单连通区域，所以$\int \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$在$\mathbb{R}^2$具有路径无关性。如图2，我们可以把积分曲线$L=\widehat{OB}$改换作更简单的两条直线路径：直线$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{AB}$，并在两条直线上分别计算积分：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\overrightarrow{OA}} \left(2xy^3-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y \\
&\quad+\int_{\overrightarrow{AB}} \left(2xy^3-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2xy^3-y^2\cos x\right)\big|_{y=0}\mathrm{d}x+\int_0^1 \left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\big|_{x=\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

这里指出，如果一个曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$积分曲线$L$与某条坐标轴平行，第二型曲线积分可以直接化简为定积分。例如我们考虑连接点(a_1,b)和点(a_2,b)的直线L，其中$a_2>a_1$，由于直线的方向向量平行于x轴，即方向向量在y方向的分量为0，单位方向向量为$(1,0)$，因此第二型曲线积分$\mathrm{d}y$部分的分量是0，严格写出来就是

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L (P,Q)\cdot(1,0)\mathrm{d}s=\int_{a_1}^{a_2} P(x,b)\mathrm{d}x. \tag{39}$$

由于积分曲线是与坐标轴平行的直线的第二型曲线积分计算简单，所以采用更换路径法时，我们一般选择换成与坐标轴平行的直线计算。

□

原函数的概念

原函数的概念来自于物理中保守力的势能，然而不理解势能的概念也不会影响原函数的理解。我们指出寻找原函数是全微分运算的逆运算，我们首先回忆全微分的概念：如果一个二元函数$u(x,y)$在点(x_0,y_0)的邻域定义，且存在参数A,B使得

$$u\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-u\left(x_0,y_0\right)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\quad \rho\to 0, \tag{40}$$

其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称$u(x,y)$在点$(x_0,y_0)$**可微**或存在**全微分**（也称“微分形式”），记做$du=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y$。相较二元函数偏导数固定一个变量而研究另一个变量的变化趋势，全微分完整地刻画二元函数在点(x_0,y_0)附近变化趋势。因此可微是比可偏导更强的结论，并且我们有若干$u(x,y)$在(x_0,y_0)可微，那么u在(x_0,y_0)的两个偏导数一定存在，并且全微分形式中参数满足

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\mathrm{d}y. \tag{41}$$

现在反过来，如果我们给出微分形式$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，我们想寻找一个函数$u$使得$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，函数$u(x,y)$称为微分形式$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$的**原函数**。

因此寻找原函数的过程，就是寻找一个函数u同时满足$\frac{\partial u}{\partial x}=P$和$\frac{\partial u}{\partial y}=Q$。然而原函数并不通常并不存在，此前路径无关性的分析告诉我们微分形式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$存在原函数的充分必要条件是在一个单连通区域$D$上有$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。如果确认了原函数存在，可以通过观察法或分项积分法计算微分形式的原函数。我们下面介绍分项积分法：

以例题6为例，考虑微分形式$\left(2xy^3-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y$，我们此前的分析得知它一定有原函数。为了得到它的原函数，即找到u满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3-y^2\cos x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=1-2y\sin x+3x^2y^2. \tag{42}$$

我们首先对项$2xy^3-y^2\cos x$进行以x为自变量y常数的不定积分

$$u(x,y)=\int\left(2xy^3-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x=y^3x^2-y^2\sin x+C(y), \tag{43}$$

函数$u(x,y)$中的常数$C(y)$是依赖y的待定函数。如果我们还希望$\partial_y u(x,y)=1-2y\sin x+3x^2y^2$成立就能保证$u$是原函数，即

$$3y^2x^2-2y\sin x+C'(y)=1-2y\sin x+3x^2y^2. \tag{44}$$

为此$C'(y)=1$即$C(y)=y+C_0$其中C_0是常数。综上原函数是

$$\mathrm{d}\left(y^3x^2-y^2\sin x+y+C_0\right)=\left(2xy^3-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y. \tag{45}$$

设D是一个单连通区域，曲线$\widehat{AB}\subset D$。如果一个第二型曲线积分$\int\int_{\widehat{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的微分形式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$D$上存在原函数$u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$（等价于$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$），那么

$$\int_{\widehat{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=u(B)-u(A). \tag{46}$$

由于式(46)的形式与牛顿莱布尼茨公式相近，这也是u的原函数名字的得来。

下面我们看一个使用原函数计算路径无关的第二型曲线积分的题目：

例 7. 计算曲线积分$\int_L\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$，其中$L$是以$(1,0)$为起点，以$(6,8)$为终点的直线。

分析：本题介绍原函数法，附注介绍了原函数的相关概念。只要确定了原函数，就能快速计算曲线积分的值。

Proof. 被积函数$\mathbf{F}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$在原点以外有定义，且满足

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \tag{47}$$

我们考虑矩形区域$D=[1,6]\times[0,8]$，D显然单连通，由此曲线积分在D上具有路径无关性。同时可以在D上找到原函数：

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2). \tag{48}$$

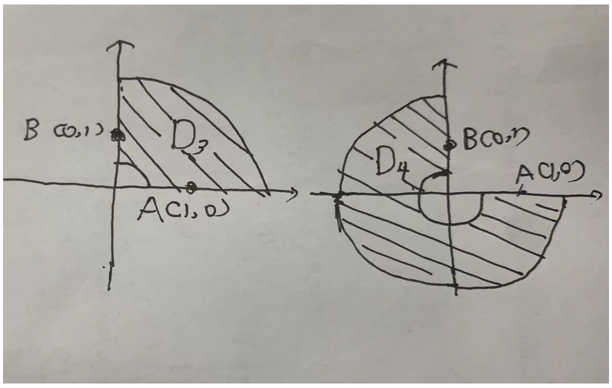

图 3: 区域D_3和D_4的示意图。

因此

$$I=\int_L \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{(x,y)=(1,0)}^{(x,y)=(6,8)}=\ln 10. \tag{49}$$

□

在本节的结尾，我们尝试从原函数的视角重做例题5，由此加深对原函数概念的理解。回忆三个曲线积分(32)-(33)，他们的值$P_1=P_2=P_3-2\pi$。一个自然的问题是既然三个积分具有相同的起始点，如果微分形式$\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$存在原函数，那么三个积分的值理应相同。部分同学将理由归咎于去原点的单位圆$D_2/\{(0,0)\}$由于区域非单连通，导致积分不具有路径无关性，因此不能使用原函数法计算积分。实则不然，如图3,考虑挖去圆心处小圆的两个扇形区域D_3和D_4，这两个图形均符合单连通条件，因此曲线积分在各自区域有路径无关性并且存在原函数。注意到劣弧$J_1\subset D_3$，而优弧$J_3\subset D_4$，也就是说我们可以在各自区域里使用原函数的方法计算曲线积分P_1和P_3，因此得到的曲线积分值看似应该相同。

然而实际结果是$P_1\neq P_3$。为了深入理解，我们考虑微分形式的原函数，可以得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)=\frac{-x}{x^2+y^2}. \tag{50}$$

部分同学可能可能想当然的认为函数$u(x,y)=\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$是微分形式$\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$的原函数。然而再次观察函数$\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$，我们发现特殊的事实：函数$u(x,y)$在$x$轴正半轴的函数值为$\frac{\pi}{2}$（注：$\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$），在第一象限的函数值是正值，而在第二象限的函数值是复值（注：第二象限$x>0,y<0$），因此函数$u(x,y)$在x轴处实际并不连续，故必然不可能作为原函数。回头看区域D_3和D_4，区域D_3没有跨越x轴，所以函数$u(x,y)$确实是微分形式$\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$的原函数；区域$D_4$跨越了$x$轴，而函数$u(x,y)$在$x$轴附近不是微分形式$\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$的原函数！因此我们可以直接通过原函数法计算$P_1$：

$$P_1=u(0,1)-u(1,0)=-\frac{\pi}{2}. \tag{51}$$

但是不能使用原函数法计算P_3。如果想构造D_4上的原函数需要做一些处理：考虑分段函数

$$\bar{u}(x,y)=\begin{cases}\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+\pi, & \text{第二象限及}x\text{轴负半轴},\\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right), & \text{第三象限第四象限},\\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right)-\pi, & x\text{轴正半轴}.\end{cases} \tag{52}$$

即在x轴附近提升一侧的函数值构造分段原函数，然后

$$P_3=\bar{u}(0,1)-\bar{u}(1,0)=(0+\pi)-\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)=\frac{3\pi}{2}. \tag{53}$$

可见原函数没经过一次x轴，我们必须将一侧的函数值抬升以保证原函数的光滑性。后续课程数学物理方法中的幅角原理讨论的也是类似的思想。对于我们的启示是，使用原函数法时，一定要确定构造的原函数是否在区域上处处具有光滑性。

Green公式的推广与散度定理

在此之前我们先介绍方向余弦的概念。设向量$\mathbf{a}$是平面的任意向量，我们用$\cos(\mathbf{a},x)$和$\cos(\mathbf{a},y)$为$\mathbf{a}$关于两个坐标轴的夹角的余项，称向量$\mathbf{a}$的**方向余弦**。由于余弦函数是偶函数，因此描述夹角的余弦是无需讨论有向角。关于方向余弦最基本的性质是

$$\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\cdot(\cos(\mathbf{a},x),\cos(\mathbf{a},y)), \tag{54}$$

换言之，我们也可以将方向余弦向量$(\cos(\mathbf{a},x),\cos(\mathbf{a},y))$看作向量$\mathbf{a}$在对应方向的单位法向量。在部分情况下，使用方向余弦表达给定向量对应的单位向量是非常方便的。

接下来我们来看一个例题：

例 8. ***2021春季期中考试题.*** 设$u(x,y)$和$v(x,y)$在有界闭区域D上存在连续偏导数，D的边界L是分段光滑的曲线，并且$u(x,y)$和$v(x,y)$在D的边界存在连续的一阶偏导数，$\mathbf{n}$是边界L上的外方向法向量，求证：$\oint_L[u\cos(\mathbf{n},x)+v\cos(\mathbf{n},y)]\,\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

Proof. 在Green公式中令$P=-v$和$Q=u$得到

$$\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L^+}-v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y=\oint_L(-v,u)\cdot\mathbf{t}\mathrm{d}s, \tag{55}$$

这里用$\mathbf{t}$代表L^+方向的单位方向向量，第二个等式应用了第二型曲线积分和第一型曲线积分的互化。

题设中涉及的向量是L^+方向的外法向量$\mathbf{n}$，我们知道法向量垂直于方向向量，我们需要了解$\mathbf{n}$和$\mathbf{t}$的关系。根据方向余弦写法，外法向量的单位向量为$(\cos(\overrightarrow{n},x),\cos(\overrightarrow{n},y))$。

根据外侧的定义，L^+方向的方向向量相当于将外法向量逆时针旋转90度，因此通过法向量的方向余弦写出单位方向向量的形式

$$\mathbf{t} = \left(\cos\left((\mathbf{n}, x) + \frac{\pi}{2}\right), \cos\left((\mathbf{n}, y) + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\cos(\mathbf{n}, y), \cos(\mathbf{n}, x)), \tag{56}$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \oint_L (-v, u) \cdot (-\cos(\mathbf{n}, y), \cos(\mathbf{n}, x))\mathrm{d}s \\ &= \oint_L [u\cos(\mathbf{n}, x) + v\cos(\mathbf{n}, y)]\, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{57}$$

□

设$\mathbf{n}$表示单位外法向量，例8的结果写成内积的形式是

$$\oint_{L^+} (u, v) \cdot \mathbf{n}\mathrm{d}s = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{58}$$

这一结果与Green公式等价，我们可以根据形式的需要来使用合适的形式。另一方面，式(58)的右侧被称为向量函数$\mathbf{F} = (u, v)$的**散度**，记为

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{59}$$

因此物理文献有时称Green公式为**散度定理**。然而从数学角度来看，Green公式更像是分部积分运算的推广：定积分可以将本身积分转化为边界的信息，二重积分则将本身转化为边界的曲线积分。一些数学文献直接称Green公式为分部积分。

2 经典习题

本节习题除了标准的计算题外，题目种类很多。包括对称法，挖洞法，Green公式的应用方法都是值得关注的考点。

2.1 例题

题 1. 计算曲线积分$I = \oint_L |y|\mathrm{d}s$，其中$L$是双纽线$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$。

分析：本题的双纽线是我们很熟悉的，需要首先将双纽线换位极坐标方程$r = \cos 2\theta$。根据极坐标表达式$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$我们可以写出双纽线的以极角$\theta$为自变量的参数方程。

Proof. 我们计算曲线的极坐标方程$r^2 = \cos 2\theta$，在此前我们就知道双纽线在四个象限的部分是对称的，被积函数$|y|$也关于两个坐标轴对称，因此我们可以只考虑第一型曲线积

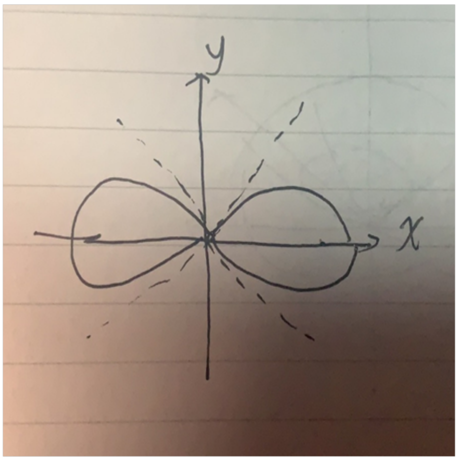

图 4: 练习题1和练习题2的双纽线示意图示意图

分在双纽线第一象限的部分。双纽线在第一象限的部分的极角满足$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$，那么我们可以进一步写出曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta, \\ y = \sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta. \end{cases} \tag{60}$$

是参数方程。接下来求导

$$\begin{cases} x' = -\sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \cos \theta, \\ y' = \sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta - \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \sin \theta. \end{cases} \tag{61}$$

然后计算平方和

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\cos 2\theta + \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}} \mathrm{d}\theta = \sqrt{\frac{1}{\cos 2\theta}} \mathrm{d}\theta. \tag{62}$$

然后带入曲线积分公式

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta \sqrt{\frac{1}{\cos 2\theta}} \mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \mathrm{d}\theta = 4 - 2\sqrt{2}. \tag{63}$$

在一些教材中，也给出了曲线极坐标方程情况下弧长微元的计算公式。考虑极坐标方程$r = r(\theta)$，其对应的参数方程$x(\theta) = r(\theta) \cos \theta$和$y(\theta) = r(\theta) \sin \theta$，由此

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(r(\theta) \cos \theta\right)\right]^2 + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(r(\theta) \sin \theta\right)\right]^2} \mathrm{d}\theta = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} \mathrm{d}\theta. \tag{64}$$

□

题 2. 计算曲线积分$I = \oint_{L^+} \frac{xy(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}$，其中$L$为双纽线$r^2 = \cos 2\varphi$的右半支。

本题：相较例题4，本题对称性更加难以发掘。如果不使用对称性，本题的计算量是格外巨大的。

Proof. 双纽线是我们非常熟悉的图形，双纽线的右半支关于x轴对称。为了使用对称性，我们首先将题目的第二型曲线积分写成第一型曲线积分

$$I = \oint_L \left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}, \frac{-x^2y}{x^2+y^2} \right) \cdot \mathbf{t} \mathrm{d}s. \tag{65}$$

其中$\mathbf{t} = (t_1, t_2)$是L逆时针方向的单位方向向量。定义内积函数

$$f(x,y) = \left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}, \frac{-x^2y}{x^2+y^2} \right) \cdot \mathbf{t} = xy^2 t_1 x^2 + y^2 - \frac{-x^2 y t_2}{x^2+y^2}. \tag{66}$$

我们实际考虑的就是关于函数$f(x,y)$的第一型曲线积分，不过需要注意t_1, t_2也依赖(x,y)。

现在考虑关于x轴对称的两个点$A(x_0, y_0)$和$B(x_0, -y_0)$，其中A是位于第一象限的。点A处的方向向量$\mathbf{t}(A)$是指向左下方的，点B处的方向向量$\mathbf{t}(B)$是指向右下方的，两个方向向量的第一分量相反，第二分量相同，即

$$t_1(A) = -t_1(B), \quad t_2(A) = t_2(B). \tag{67}$$

代入函数$f(x,y)$的表达式

$$\left. \frac{xy^2 t_1}{x^2+y^2} \right|_{(x,y)=A} = - \left. \frac{xy^2 t_1}{x^2+y^2} \right|_{(x,y)=B}, \quad \left. \frac{-x^2 y t_2}{x^2+y^2} \right|_{(x,y)=A} = - \left. \frac{-x^2 y t_2}{x^2+y^2} \right|_{(x,y)=B}. \tag{68}$$

所以$f(x,y)$的函数值在关于x轴对称的两个点$A(x_0,y_0)$和$B(x_0,-y_0)$是相反的，由此

$$I = \int_L f(x,y) \mathrm{d}s = 0. \tag{69}$$

□

题 3. 计算曲线积分$I = \int_L \frac{xdy - ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L$是圆周$(x-1)^2 + y^2 = 2$的逆时针方向。

分析：本题是经典方法**“挖洞法”**的介绍，“挖洞法”是解决使用Green公式计算环路曲线积分时区域有无定义点的经典方法。

Proof. 设被积函数$\mathbf{F} = (P, Q) = \left(\frac{x}{4x^2+y^2}, \frac{-y}{4x^2+y^2} \right)$，首先我们发现

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{4x^2 - y^2}{(4x^2+y^2)^2}. \tag{70}$$

用D表示圆圆周$(x-1)^2 + y^2 = 2$内部。与例题5的积分I_2类似，被积函数$\mathbf{F}$在原点没有定义，我们不能直接在圆D上使用Green公式。但是我们构造原点附近找一个邻域（“洞”）C，在D上挖掉洞以后被积函数在多连通区域D/C可以使用Green公式，由此我们就可以将外层边界L的曲线积分转换到洞的边界上的积分。然而洞C形状的选择是有讲究的：我们选择挖去椭圆$C_\varepsilon = \{4x^2 + y^2 \le \varepsilon\}$，其中$\varepsilon > 0$很小。区域$D/C_\varepsilon$的正

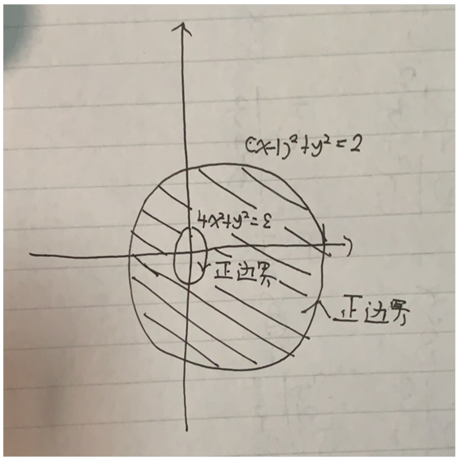

图 5: 练习题3示意图

定向边界是两段，包括一段是原著$(x-1)^2+y^2=2$按逆时针走，另一端$4x^2+y^2=\varepsilon$按顺时针走，所以

$$0=\oint_{\partial(C/C_\varepsilon)^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{(x-1)^2+y^2=1\circlearrowleft} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{4x^2+y^2=\varepsilon\circlearrowright} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y, \quad (71)$$

因此

$$\int_{(x-1)^2+y^2=1\circlearrowleft} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{4x^2+y^2=\varepsilon\circlearrowleft} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y. \quad (72)$$

接下来计算

$$\begin{aligned} I &= \int_{4x^2+y^2=\varepsilon\circlearrowleft} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \\ &= \varepsilon^{-1}\int_{4x^2+y^2=\varepsilon\circlearrowleft} -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\varepsilon^{-1}\iint_{4x^2+y^2\le\varepsilon} 2dxdy=\frac{2\pi\varepsilon}{2\varepsilon}=\pi. \end{aligned} \quad (73)$$

注意$4x^2+y^2\le\varepsilon$是以$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$和$\sqrt{\varepsilon}$为半轴的一个椭圆，面积是$\frac{\pi\varepsilon}{2}$。

总结一下“挖洞法”，我们为了利用Green公式我们在没有定义的原点附近挖一个洞，得到新的图形不包含没有定义的点。在新区域进行Green公式，得到挖的洞的边界上的一个第二型曲线积分。为了计算洞边界的曲线积分，**我们可以为洞的边界设置比较好的形状**，这也是我们此前选择挖椭圆形状的洞的原因。所以“挖洞法”一般步骤是

1.在无定义点附近挖一个符合被积函数特点的洞

2.通过Green公式将外层的曲线积分转化的洞的边界

3.通过化简计算洞边界的曲线积分。 □

题 4. 给定二元函数$f(x,y)$，拉普拉斯算子作用在f上得到一个新的函数$\Delta f(x,y)$，其定义为

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y). \quad (74)$$

设$u(x,y)$和$v(x,y)$在有界闭区域D上存在连续偏导数，D的边界L是分段光滑的曲线，并且$u(x,y)$和$v(x,y)$在D的边界存在连续的一阶偏导数，$\mathbf{n}$是边界L上的外方向法向量，求证：

1.$\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s = \iint_D \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

2.$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L \left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathrm{d}s$。

分析：本题是利用Green公式或其推论式(58)证明积分恒等式的题目，其关键是考虑在Green公式$\oint_{L^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$或其推论式(58)中，将函数$P,Q$赋以何种函数，以对应题目要证明的结论。

Proof. **1.**我们用方向余弦$(\cos(\mathbf{n},x),\cos(\mathbf{n},y)$表示外法向量$\mathbf{n}$的单位向量，根据方向导数的定义有

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\mathbf{n},x) + \frac{\partial v}{\partial x}\cos(\mathbf{n},x). \tag{75}$$

由于法向量的存在，这一形式更接近Green公式的推论(58)非常类似，我们在式(58)中用偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial y}$代入

$$\begin{aligned}\oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\mathbf{n},x) + \frac{\partial v}{\partial x}\cos(\mathbf{n},x)\right)\mathrm{d}s &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}\tag{76}$$

2.我们依旧从方向导数项出发

$$u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = u\frac{\partial v}{\partial x}\cos(\mathbf{n},x) + u\frac{\partial v}{\partial y}\cos(\mathbf{n},y). \tag{77}$$

然后在式(58)代入$u\frac{\partial v}{\partial x}$和$u\frac{\partial v}{\partial y}$得到

$$\begin{aligned}\oint_L \left(u\frac{\partial v}{\partial x}\cos(\mathbf{n},x) + u\frac{\partial v}{\partial y}\cos(\mathbf{n},y)\right)\mathrm{d}s &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left(u\Delta v + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}\tag{78}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\oint_L v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s &= \oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\mathbf{n},x) + v\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\mathbf{n},x)\right)\mathrm{d}s \\ &= \iint_D \left(v\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}\tag{79}$$

将两式相减即可得到需要的结论。

□

题 5. 计算曲线积分$\oint_L \frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}[(x\sin x + y\cos x)\mathrm{d}x + (y\sin x - x\cos x)\mathrm{d}y]$，其中$L$是椭圆$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$的逆时针方向。

分析：本题是Green公式应用题中的经典难题，除了需要挖洞法的思想外，还需要结合重积分中值定理。

Proof. 我们首先确定被积函数

$$\mathbf{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))=\left(\frac{\mathrm{e}^y(x\sin x+y\cos x)}{x^2+y^2},\frac{\mathrm{e}^y(y\sin x-x\cos x)}{x^2+y^2}\right). \tag{80}$$

我们自然希望被积函数具有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$性质，并伺机使用路径无关性或挖洞法。实际上我们有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\mathrm{e}^y\left(x\sin x+y\cos x\right)}{x^2+y^2}-\frac{2xy\mathrm{e}^y\sin x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\mathrm{e}^y\cos x\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}. \tag{81}$$

根据挖洞法的思想，我们很容易将原本在椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$转化到小圆$x^2+y^2=r^2$上，并由此化简被积函数的分母，具体步骤是：定义小圆$C_r=\{(x,y):x^2+y^2\le r^2\}$，考虑去心区域$C_1/C_\epsilon$，被积函数$\mathbf{F}$在$C_1/C_r$有定义，Green公式得知$\mathbf{F}$在圆环$C_1/C_\epsilon$的两条正向边界上的第二型曲线积分之和是0。椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的正定向是逆时针方向，小圆$x^2+y^2=r^2$的正定向是顺时针方向，因此

$$0=\oint_{\partial(C_1/C_r)^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{\frac{x^2}{2}+y^2=1\circlearrowleft}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{x^2+y^2=r^2\circlearrowright}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0, \tag{82}$$

进一步得到

$$I=\oint_{\frac{x^2}{2}+y^2=1\circlearrowleft}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{x^2+y^2=r^2\circlearrowleft}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y. \tag{83}$$

得到小圆上的曲线积分后，我们化简被积函数去除分母，然后在小圆C_r用Green公式：

$$\begin{aligned}I&=\oint_{x^2+y^2=r^2\circlearrowleft}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{r^2}\int_{x^2+y^2=r^2\circlearrowleft}\mathrm{e}^y[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y]\\&=\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\le r^2}(-2\mathrm{e}^y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{84}$$

然而稍加计算就会发现二重积分$\iint_{x^2+y^2\le r^2}(-2\mathrm{e}^y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$是无法计算的，无论是直接化累次积分还是使用极坐标换元都会导致被积函数过于复杂。为了估计上述二重积分，我们在圆盘C_r使用二重积分中值定理：存在依赖r的点$(a,b)\in C_r$使得

$$\iint_{x^2+y^2\le r^2}(-2\mathrm{e}^y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi r^2\mathrm{e}^a\cos b, \tag{85}$$

由于小圆的半径r是任取的，考虑$\epsilon\to 0$有

$$\lim_{r\to 0+0}\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\le r^2}(-2\mathrm{e}^y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{r\to 0+0}\left(-2\pi\mathrm{e}^a\cos b\right). \tag{86}$$

我们注意到当$r\to 0+0$，点(a,b)随着半径的缩小必然靠近圆心，由此$\mathrm{e}^a\cos b\to 1$，所以

$$\lim_{r\to 0+0}\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\le r^2}(-2\mathrm{e}^y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{r\to 0+0}\left(-2\pi\mathrm{e}^a\cos b\right)=-2\pi. \tag{87}$$

我们之前的分析告诉我们二重积分$\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2}(-2\mathrm{e}^y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的值是不依赖半径$r$的，且数值与本题所求的积分$I$相等。结合$\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2}(-2\mathrm{e}^y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$在$r\to 0+0$时的极限，我们就可以得到$I=-2\pi$。 $\square$

2.2 精选补充题

补 1. ***2021春季期中考试题.*** 设L为椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的逆时针方向，计算曲线积分$I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$。

补 2. 计算曲线积分$I=\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y}{3(x^2+y^2)}$，其中$L$是曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$的在$x$轴以上部分的逆时针方向。

补 3. 计算曲线积分$\iint_L\left(x^3y^2+x^2y^3\right)\mathrm{d}s$，其中$L$是单位圆。（提示：尝试将第一型曲线积分化成第二型曲线积分，然后利用$Green$公式）

补 4. 解答下列问题

1.设曲线C的弧长为L，求证：

$$\left|\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\right|\leqslant ML, \tag{88}$$

其中$M=\max_{(x,y)\in C}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}$。

2.利用上一问结论，证明$\lim_{R\to 0}\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}=0$。

补 5. 设平面矩形区域$D=[0,\pi]\times[0,\pi]$，记L是D的正向边界，求证

1.$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$。

2.$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2$。（提示：结合重积分对称性）

补 6. 设D是有界平面区域，其边界L分段光滑，定点$P_0(x_0,y_0)$不在L上。设$P(x,y)$是L上的动点，向量$\mathbf{n}$表示P处曲线L的外侧单位法向量，向量$\mathbf{r}$是以P_0为起点，以P为终点的向量，定义以点P坐标为自变量的函数$f(x,y)=\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{|\mathbf{r}|}$，计算曲线积分$I=\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$。（提示：转化为第二型曲线积分，然后分$P_0$是否在$D$内部使用挖洞法）