无穷积分和瑕积分

谢彦桐

北京大学数学科学学院

May 28, 2022

1 知识内容理解

无穷积分和瑕积分统称广义积分，广义积分在形式上可以理解为数项级数的连续情形，因此判断无穷积分的收敛性的方法可以与数项级数的判别法相互对应。无穷积分和瑕积分相关的题目普遍分为两类：判别收敛性和计算积分的值，我们会分别介绍两类方法。

如不加说明，本章所有积分的被积函数都是连续函数或仅在有限个点不连续的函数，这使得被积函数在任意区间都可积。为了方便起见本章称有限区间定积分为“正常积分”，与“广义积分”对应。

1.1 无穷积分和瑕积分的定义和性质

无穷积分的定义和理解

无穷积分是指积分区间为无穷区间的积分，通常的形式为

$$I=\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

相较常规的定积分通过划分区间和累积曲边梯形面积定义，无穷积分的积分区间无穷大的特点，使得不能直接将积分区间划分为有限个小段。因此无穷积分是通过正常积分的极限，即

$$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{X\to+\infty}\int_1^X f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

上述定义涉及的最大问题便是右侧极限不一定存在，因此无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$并不一定总是良定义的。如果极限存在，我们称无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$**收敛**，否则称无穷积分**发散**。

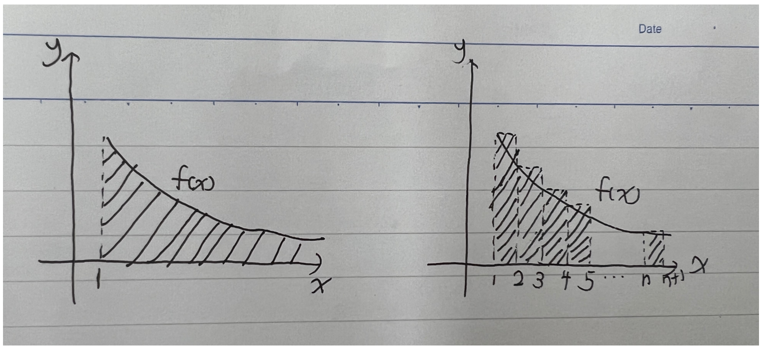

图 1: 左图：无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的几何意义是$f(x)$图像在无穷区间的线下面积；右图：用数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$代表的矩形面积和近似无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。

这里部分同学会有疑惑，积分和收敛、发散二词似乎并无明显联系。实际上，如果我们可以将无穷积分和数项级数联系起来：我们将积分区间$[1,+\infty)$划分为无穷个子区间$[1,2),[2,3)\cdots$，在每个区间上以区间左端点的值计算曲边梯形面积为$1\cdot f(n)$，因此形式上可以定义无穷积分的值为

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{n=1}^{\infty} f(n). \tag{3}$$

因此，如果我们将无穷积分离散，就可以转换为数项级数，这也是为什么我们用收敛和发散称呼无穷积分的极限是否可以定义。当然我们指出，式(3)的无穷积分和数项级数的敛散性和值不一定相同，将他们放在一起只是帮助我们理解无穷积分收敛性的含义，后续无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛性的很多判别法都可以和数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛性的判别法对应。同时我们也形成了关于无穷积分最直观的几何理解，即无穷区间$[1,+\infty)$上函数$f(x)$图形的线下面积（如图所示）。

最后，我们来看几个收敛和发散的无穷积分，以从主观上理解无穷积分收敛和发散的含义：

- **例子1.** 无穷积分$I=\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$是收敛的，积分值定义为

  $$I=\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{X\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-X}\right)=\mathrm{e}^{-1}. \tag{4}$$

  我们可以见到，当$x\to+\infty$时被积函数e^{-x}的值在逐渐变小，使得定积分$\int_1^X \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$的值随$X$涨幅不大，因此无穷积分收敛。

- **例子2.** 无穷积分$I=\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$是发散的，因为

  $$I=\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\lim_{X\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{X}-\mathrm{e}\right)=+\infty. \tag{5}$$

  当$x\to+\infty$时被积函数e^{x}的值不断增加，考虑到无穷积分是在无限长区间定义的积分，当$x\to+\infty$时被积函数的函数值依然很大就很难保证正常积分值极限的收敛。

- **例子3.** 无穷积分$I=\int_1^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$是发散的，因为

$$I=\lim_{X\to+\infty}\int_1^X\cos x\mathrm{d}x=\lim_{X\to+\infty}(\sin X-\sin 1)\text{ 极限发散}. \tag{6}$$

当$x\to+\infty$时被积函数$\cos x$的值虽没有无限增长，但是其函数值在$[-1,1]$反复震荡。从定积分的几何意义来看，定积分$\int_1^X\cos x$可以看作x轴以上和x轴以下多块面积的累加。当$X\to+\infty$时，$\cos x$的震荡特性使得定积分$\int_1^X\cos x$的值反复震荡，从而极限不收敛。

从上述几个例子可以看到，被积函数$f(x)$在$x\to+\infty$的行为会影响无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$的收敛，收敛无穷积分需要$f(x)$在$x\to+\infty$的函数值比较小，而$f(x)$在$x\to+\infty$函数值过大或反复震荡都有可能导致无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散。上述收敛和发散的特征与数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛或发散的特征非常相似。

无穷积分的性质

由于无穷积分的收敛的本质是变上限的正常积分函数的收敛，因此无穷积分的各个性质都可以类比到函数极限的性质：

- **无穷积分的加减** 考虑两个无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$和$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，那么无穷积分$\int_1^{+\infty}(f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x$也收敛，并且$\int_1^{+\infty}(f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\pm\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$。这一性质对应函数极限的加减法性质。作为推论，如果无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$和$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$一个收敛一个发散，那么无穷积分$\int_1^{+\infty}(f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x$发散。
- **级数的数乘** 考虑无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$和$c\in\mathbb{R}$，那么无穷积分$\int_1^{+\infty}(cf(x))\mathrm{d}x$也收敛，并且$\int_1^{+\infty}(cf(x))\mathrm{d}x=c\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$。这一性质对应函数极限的数乘性质。
- **积分下限不影响** 无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$与$\int_A^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$具有相同的收敛性。

此外，函数极限的柯西准则也可以应用在无穷积分的收敛性上

定理 1. 无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$的充分必要条件是，对于$\forall\varepsilon>0$，存在$X_0>1$，如果$X_2>X_1>X_0$就一定有$\left|\int_{X_1}^{X_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$。

此外还有两类特殊的无穷积分需要注意：

1.在无穷区间$(-\infty,-1]$定义的无穷积分 无穷积分$I=\int_{-\infty}^{-1}f(x)\mathrm{d}x$的收敛性也由正常积分的收敛性定义：

$$I=\lim_{Y\to-\infty}\int_Y^{-1}f(x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

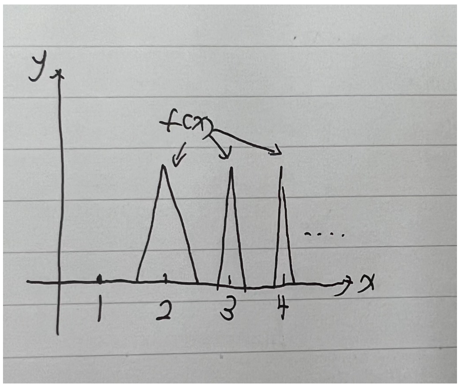

图 2: 式(9)给出的反例函数示意图。

无穷区间$(-\infty,-1]$上的无穷积分可以用和$[1,+\infty)$上无穷积分相同的方法研究，因此我们不做单独讨论。

2.双侧无穷积分 在$(-\infty,+\infty)$上定义的无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$的收敛定义为无穷积分$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$和无穷积分$\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x$均收敛，两个无穷积分中有一个发散或两个均发散时，都定义为无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散。（注：部分同学可能或疑惑两个发散序列的和序列可以收敛，但是这里我们对两个不同区间上发散无穷积分的和是强制定义为发散的。）

作为本章结尾我们思考一个问题：既然数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛可以推出$\lim_{n\to\infty}f(n)=0$，那么无穷积分$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛能不能推出$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$呢？答案是否定的。例如我们可以构造$[1.+\infty)$的分段函数

$$f(x)=\begin{cases}n^2\left(x-n+\frac{1}{n^2}\right) & ,x\in\left[n-\frac{1}{n^2},n\right],\, n\in\mathbb{Z},\, n\geq 2,\\ -n^2\left(x-n-\frac{1}{n^2}\right) & ,x\in\left(n,n+\frac{1}{n^2}\right],\, n\in\mathbb{Z},\, n\geq 2,\\ 0 & ,\text{其他点}.\end{cases} \tag{9}$$

如图所示，$f(x)$相当于在每一个整点$n\geq 2$附近凸起一个高度为1宽度为$\frac{2}{n^2}$的山包，山包的面积为$\frac{1}{n^2}$，随着n增大山包的高度不变宽度减小，所以无穷积分$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，并且

$$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}, \tag{10}$$

但是$\lim_{x\to+\infty}f(x)$发散。实际上，想要将数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛推出$\lim_{n\to\infty}f(n)=0$的结论推广到无穷积分，需要增加$f(x)$是单调函数的条件：

定理 2. 如果无穷积分$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛且$f(x)$在$[1,+\infty)$单调，那么$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$。

这一定理的证明作为一道补充题。

瑕积分的定义和性质

如果$f(x)$是$[a,b]$上可积，即定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是正常积分，那么$f(x)$在$[a,b]$必须有界。**瑕积分**的仍然是有限闭区间$[a,b]$上的积分，但是其被积函数$f(x)$不再有界。其主要特点是被积函数$f(x)$在端点$x=a$处没有定义，并且$f(x)$在$x\to a+0$时无界，这使得被积函数$f(x)$在正常定积分的视角里不可积，因为黎曼和的累积收到a附近无界性的影响导致了发散。此时点$x=a$被称为**瑕点**。瑕积分也是通过正常积分的单侧极限定义的

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{X\to a+0}\int_X^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{11}$$

关于瑕积分的理解有一种常见的误解：我们上册曾经计算过积分$\int_0^1 x\ln x\mathrm{d}x$，被积函数$x\ln x$虽然在$(0,1]$连续，但是在点$x=0$不能定义，此时$x=0$是不是瑕点呢？答案是否定的，因为根据极限$\lim_{x\to 0+0} x\ln x=0$，如果我们将$(0,1]$上的被积函数$x\ln x$补充点$x=0$处定义为

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} x\ln x & ,x\in(0,1], \\ 0 & ,x=0. \end{cases} \tag{12}$$

就得到了$\tilde{f}(x)$是在$[0,1]$连续的函数，因此$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$是正常积分。究其原因，是瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$不仅要求在瑕点$x=a$处被积函数不能定义，还要求$x\to a+0$时被积函数无界，这使得我们无法通过对$x=a$点补充定义的方式得到正常积分。

与正常积分和无穷积分类似，瑕积分的几何意义也可以看作闭区间$[a,b]$上被积函数$f(x)$图像的线下面积，只是因为瑕点附近被积函数无界，所以造成$f(x)$图像形成的线下图像不封闭。

与此前类似，我们依然给出一些瑕积分来体会瑕积分的收敛和发散：

- **例子1.**瑕积分$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$以$x=0$为瑕点，积分是收敛的，其值定义为

$$I=\lim_{X\to 0+0}\int_X^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{X\to 0+0}\left(2-2\sqrt{X}\right)=2. \tag{13}$$

  被积函数$\frac{1}{\sqrt{x}}$虽然在$x\to 0+0$时趋于无穷，但是由于趋于无穷的速度并不是很快，正常积分$\int_X^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$的值并没有随着$X\to 0+0$而趋于无穷，使得无界函数$\frac{1}{\sqrt{x}}$图像的线下面积对应的瑕积分有限。

- **例子2.**瑕积分$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$以$x=0$为瑕点，积分是发散的，因为

$$I=\lim_{X\to 0+0}\int_X^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{X\to 0+0}(-\ln X)=+\infty. \tag{14}$$

被积函数$\frac{1}{x}$在$x \to 0+0$时趋于无穷，且趋于无穷的速度并收敛瑕积分的被积函数$\frac{1}{\sqrt{x}}$更快，正常积分$\int_X^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$的值随着$X \to 0+0$而趋于无穷，因此无界函数$\frac{1}{x}$图像的线下面积最终累积为无穷。

- **例子3.**瑕积分$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$以$x=0$为瑕点，积分是发散的，因为

$$I = \lim_{X\to 0+0}\int_X^1 \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \lim_{X\to 0+0}\left(-\sin 1 + \sin\left(\frac{1}{X}\right)\right)\text{发散}. \tag{15}$$

被积函数$\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$在$x \to 0+0$时趋于无穷，且函数值反复正负震荡，使得正常积分值$\int_X^1 \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$也随着$X \to 0+0$反复震荡，因此瑕积分发散。

因此我们得出结论，如果以$x=a$为瑕点的瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛，需要$f(x)$在$x \to a+0$时趋于无穷的速度比较慢；如果以$x=a$为瑕点的瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散，主要可能的原因是$f(x)$在$x \to a+0$时趋于无穷的速度过快，或者$f(x)$在$x \to a+0$时以反复正负震荡的方式趋于无穷。

瑕积分并没有很直观的数项级数解释。瑕积分的运算性质和柯西准则都可以类比无穷积分，这里忽略。

此外还有几类特殊的瑕积分需要注意：

1.具有两个瑕点的瑕积分 如果$f(x)$在边界点$x=a,b$都是瑕点，双侧瑕点的瑕积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{16}$$

即等于两个单侧瑕点瑕积分的和，其中点$c \in (a,b)$任取。如果两个单侧瑕点瑕积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$和$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$都收敛，我们称瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；如果两个单侧瑕点瑕积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$和$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$至少有一个发散，我们称瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散。

2.瑕点在区间内部的瑕积分 设$c \in [a,b]$，如果$f(x)$在点$x=c$为瑕点，瑕积分定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{17}$$

即等于两个单侧瑕点瑕积分的和。如果两个单侧瑕点瑕积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$和$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$都收敛，我们称瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；如果两个单侧瑕点瑕积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$和$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$至少有一个发散，我们称瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散。

3.无穷瑕积分 如果$f(x)$在$x=a$为瑕点，那么无穷瑕积分定义为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \tag{18}$$

即等于瑕积分和无穷积分的和，其中点$x \in (a,+\infty)$任取。如果上述的两个广义积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$和$\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$都收敛，我们称无穷瑕积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛；如果两个广义积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$和$\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$至少有一个发散，我们称无穷瑕积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散。

1.2 无穷积分收敛性的判别法

无穷积分和瑕积分的收敛性判别方法非常类似，因此我们主要讨论无穷积分的判别法。无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的许多判别法与数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$的判别法有着对应关系，应善于通过比较对比理解。

判别无穷积分收敛性最基本的方法是直接计算法，即通过计算正常积分值$\int_1^X f(x)\mathrm{d}x$的函数极限收敛性直接判别无穷积分收敛性。

例 1. 设参数$p>0$，判断无穷积分$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$的收敛性。

分析：本题的被积函数看似复杂，但是正常积分$\int_2^X f(x)\mathrm{d}x$可以直接计算出来。

Proof. 直接计算正常积分

$$\int_2^X \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} = \begin{cases} \frac{(\ln X)^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p} & ,p>1, \\ \ln\ln X - \ln\ln 2 & ,p=1, \\ \frac{1}{p-1(\ln 2)^{p-1}} - \frac{1}{p-1(\ln X)^{p-1}} & ,0<p<1. \end{cases} \tag{19}$$

取极限$X\to+\infty$，得出无穷积分$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$对$p\ge 1$发散，对$0<p<1$收敛。 □

更多情况下正常积分$\int_1^X f(x)\mathrm{d}x$的值都不可计算，因此我们需要下述几类不计算正常积分值也可以判别无穷积分收敛性的方法。

无穷积分的比较判别法

本判别法针对非负函数无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即被积函数$f(x)\ge 0$对$x\in[1,+\infty)$成立。由于无穷积分的收敛性与积分下限无关，因此只需要$f(x)\ge 0$对某个$x\in[a,+\infty)$成立就也可以视为非负函数无穷积分然后使用比较判别法。

当$f(x)$是非负函数时，对应的数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$是正项级数。正项级数最特色的性质是，数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛等价于部分和序列有界，我们很容易将这一结论推广到无穷积分上去：

定理 3. 设被积函数$f(x)\ge 0$对$x\in[1,+\infty)$成立，那么无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是关于$X\in(1,+\infty)$的正常积分函数$I(X)=\int_1^X f(x)\mathrm{d}x$是有界函数。

这样的结论告诉我们，对于被积函数非负的无穷积分而言，收敛与发散的区别体现在被积函数$f(x)$函数值的大小，函数值比较大的函数可能产生$\int_1^X f(x)\mathrm{d}x$无界，因而导致无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散；函数值比较小通常可以保证$\int_1^X f(x)\mathrm{d}x$有界，使得无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛。并且非负无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$如果发散必然积分值为$+\infty$，相

当于只存在无穷积分三个例子中的**例子1.**和**例子2.**的情况，不存在**例子3.**震荡发散的情况。

上述通过函数值的大小得出收敛性的方法即比较判别法。与数项级数的比较判别法类似，无穷积分的比较判别法也分为不等式型和极限型两种：

定理 4. 不等式型. 设被积函数$f(x)\geq 0$和$g(x)\geq 0$对$x\in[1,+\infty)$成立，如果存在参数$C>0$使得$f(x)\leq Cg(x)$对一切$x\in[1,+\infty)$成立，那么
*1.*如果$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，那么$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛。
*2.*如果$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散，那么$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发散。

定理 5. 极限型. 设被积函数$f(x)\geq 0$和$g(x)\geq 0$对$x\in[1,+\infty)$成立，如果极限$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=c$，那么
*1.*如果c是正实数，那么$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$和$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$具有相同的敛散性。
*2.*如果$c=0$，那么$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛蕴含$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发散蕴含$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散。
*3.*如果$c=+\infty$，那么$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散蕴含$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发安安，$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛蕴含$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛。

与数项级数的比较判别法类似，无穷积分的比较判别法需要我们首先选择合适的比较函数，根据比较函数无穷积分的敛散性得出题目无穷积分的敛散性。比较常用的比较函数是

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\begin{cases}+\infty(\text{发散}) & ,p\geq 1,\\ \frac{1}{p-1}(\text{收敛}) & ,0<p<1.\end{cases}\tag{20}$$

这一被积函数的地位相当于数项级数中的p级数。此外，例1中的无穷积分$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$也常常作为比较函数出现。

例 2. 设参数$p>0$，判断无穷积分$\int_1^{+\infty}x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x$的收敛性。

分析：本题为被积函数非负的广义积分，当$x\to+\infty$时被积函数$x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^p$是无穷小量，采用等价无穷小的方法选择合适的被积函数判别无穷积分收敛性。

Proof. 由于

$$x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^p=2^px\left(\sin\frac{1}{2x}\right)^{2p}\tag{21}$$

根据等价无穷小方法

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^p}{\frac{1}{x^{2p-1}}}=\frac{1}{2^p},\tag{22}$$

由比较判别法知，当$p>1$时无穷积分收敛，当$0<p\leq 1$时无穷积分发散。 □

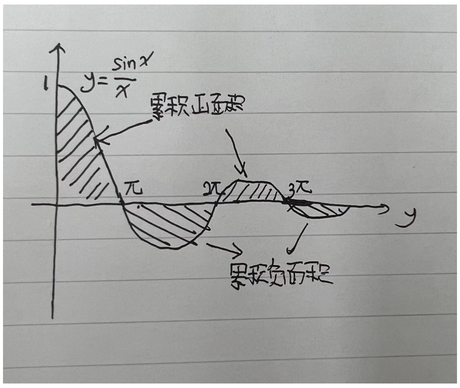

图 3: 函数$\frac{\sin x}{x}$的示意图。积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$累积面积时，$y$轴以下累积负面积，$y$轴以上累积正面积；积分$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$则在每一块都累积正面积。

值得一提的是，数项级数的D'Alembert判别法和Cauchy判别法无法推广到无穷积分，因为这两个判别法利用了序列的离散性推导，对于连续定义的函数不适用。

绝对收敛和条件收敛

如果数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$不是正项级数，但是绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$收敛，我们称为数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$绝对收敛，而绝对收敛蕴含了数项级数收敛。对于无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，**绝对收敛**定义为绝对值积分$\int_1^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$收敛，并且广义积分绝对收敛同样可以推出收敛。如果绝对值积分$\int_1^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$发散而$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，称为**条件收敛**。

我们举两个例子来看无穷积分绝对收敛和条件收敛的几何意义，这两个无穷积分收敛性的判别见后续例4。

- **例子1.** 无穷积分$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$是绝对收敛的，即积分$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$和$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\mathrm{d}x$均收敛。$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\mathrm{d}x$相当于将图中位于$x$轴上下的各个面积都加起来，而$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$相当于$x$轴上下的各个面积按照位置上下抵消。显然，如果$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\mathrm{d}x$代表的面积总和收敛，那么上下抵消的面积和$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$收敛。这说明绝对收敛蕴含条件收敛。

- **例子2.** 无穷积分$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$是条件收敛的，即积分$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$收敛而$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$发散。类似理解无穷积分的几何意义，$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$代表的面积总和虽然累积为无穷，但是上下抵消的面积和$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$却可以收敛，这体现了条件收敛的价值。

从解题角度而言，由于绝对收敛蕴含收敛，在判别无穷积分收敛性时，应先判别绝对收敛性，如果积分不绝对收敛，再考察积分是否条件收敛。

例 3. 判断无穷积分$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x$的收敛性。

分析：我们应首先分析绝对值积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\mathrm{d}x$收敛性。在采用比较判别法时，由于$\cos x$在$x$很大时为正负震荡，而$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$在$x$很大时为无穷小量，我们选择对$\cos x$项放缩。

Proof. 分析绝对值积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\mathrm{d}x$收敛性，做放缩

$$\left|\frac{\cos x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\le\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right). \tag{23}$$

我们只要有$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$收敛就有$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|\mathrm{d}x$收敛。利用等价无穷小条件

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=1. \tag{24}$$

由$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$收敛得$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$收敛，所以无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x$绝对收敛。

这里需要特别注意的是，由于$x\to+\infty$时$\frac{1}{x}$是无穷小量，所以$\frac{1}{x}$与$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$是等价无穷小量。而当$x\to+\infty$时，$\sin x$和$\cos x$反复震荡，所以不是无穷小量。在分析过程中，切勿只关注被积函数的形式使用等价无穷小方法而忽略了$x\to+\infty$的条件。 □

无穷积分的Dirichlet-Abel判别法

如果被积函数不是非负函数，我们通常使用Dirichlet-Abel判别法判断无穷积分的收敛性。与数项级数类似，我们需要将无穷积分写作$\int_1^{+\infty}a(x)b(x)\mathrm{d}x$，根据分析$a(x)$和$b(x)$各自具有的性质可以得出无穷积分$\int_1^{+\infty}a(x)b(x)\mathrm{d}x$的收敛性。我们总结在表格里。

与此前类似，我们给出无穷积分的Dirichlet-Abel判别法的几点释疑

- 要对无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$使用Dirichlet-Abel判别法，应首先将被积函数在定义域上拆分为乘积$f(x)=a(x)b(x)$。
- Dirichlet判别法相较Abel判别法，对$b(x)$的要求更低但对$a(x)$的要求更高。
- 对于Dirichlet判别法，我们通常选择$a(x)=\sin(px)$（参数$p\neq 0$）或$a(x)=\cos(px)$（参数$p>0$）使得正常积分函数$I(X)=\int_1^X b(x)\mathrm{d}x$有界；对于Abel判别法，我们通常选择$b(x)=\frac{1}{x^p}$或$b(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}$（参数均为$p>1$）或是其他题目中给定的收敛无穷积分的被积函数$b(x)$，使得无穷积分$\int_1^{+\infty}b(x)\mathrm{d}x$收敛。

下面我们来看一道非常经典的例题，它是课本例题的推广：

	Dirichlet判别法	Abel判别法
$a(x)$的性质	$a(x)$单调且$\lim_{x\to+\infty}a(x)=0$	$a(x)$单调且且有界
$b(x)$的性质	正常积分$I(X)=\int_1^X b(x)\mathrm{d}x$关于$X$有界	无穷积分$\int_1^{+\infty}b(x)\mathrm{d}x$收敛
结论	$\int_1^{+\infty}a(x)b(x)\mathrm{d}x$收敛	$\int_1^{+\infty}a(x)b(x)\mathrm{d}x$收敛

例 4. 参数$p,q>0$，讨论无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin px}{x^q}\mathrm{d}x$的收敛性和绝对收敛性。

分析：本题的收敛性部分直接使用Dirichlet判别法即可证明；绝对收敛性和不绝对收敛部分则需要利用比较判别法和特殊的技巧。本题的方法与数项级数部分的例题$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin pn}{n^q}$收敛性判别完全一致，建议对比学习。

Proof. 为了证明的顺畅性，我们先考虑无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin px}{x^q}\mathrm{d}x$的收敛性。用Dirichlet判别法，取$a(x)=\frac{1}{x^q}$收敛于0且单调递减，$b(x)=\sin px$的正常积分积分$I(X)=\int_1^X\sin px\mathrm{d}x=\frac{\cos pX-\cos p}{p}$有界，所以对一切$p,q>0$均有无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin px}{x^q}\mathrm{d}x$收敛。

再考虑绝对收敛性，即广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin px|}{x^q}\mathrm{d}x$的收敛性。我们注意到被积函数$\frac{|\sin px|}{x^q}$在$x\to+\infty$时量级主要由分母$\frac{1}{x^q}$决定，我们猜测收敛性的分界线是$q=1$。

当$q>1$时，我们用比较判别法证明收敛性

$$\frac{|\sin px|}{x^q}\le\frac{1}{x^q}. \tag{25}$$

由$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^q}\mathrm{d}x$收敛推出$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin px|}{x^q}\mathrm{d}x$收敛。

当$q\le1$时，无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin px|}{x^q}\mathrm{d}x$发散的证明比较麻烦。我们首先对被积函数进行放缩

$$\frac{|\sin px|}{x^q}\ge\frac{\sin^2 px}{x^q}=\frac{1}{2x^q}-\frac{\cos 2px}{2x^q}. \tag{26}$$

根据Dirichlet判别法可以证明$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2px}{2x^q}\mathrm{d}x$收敛，而无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^q}$发散，所以无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 px}{x^q}\mathrm{d}x$发散。另一方面，被积函数$\frac{\sin^2 px}{x^q}$和$\frac{|\sin px|}{x^q}$都非负，根据比较判别法知穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin px|}{x^q}\mathrm{d}x$发散。

综上，$q>1$时无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin px}{x^q}\mathrm{d}x$绝对收敛，$q\le1$时无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin px}{x^q}\mathrm{d}x$条件收敛。 □

取$p=q=1$并将积分区间改为$[0,+\infty)$，例4的无穷积分称为Dirichlet积分：

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x. \tag{27}$$

注意到被积函数$\frac{\sin x}{x}$虽然在$x=0$没有定义，但是由于$\lim_{x\to0+0}\frac{\sin x}{x}=1$，所以$x=0$不是Dirichlet积分瑕点。在例4的分析中，我们得到Dirichlet积分条件收敛的结论。另一

方面，虽然被积函数$\frac{\sin x}{x}$的原函数不是简单函数，因此我们无法通过Newton-Leibniz公式计算Dirichlet积分的值，但是我们却可以通过后续的含参变量积分的方法严格证明Diriclet积分的值为$I=\frac{\pi}{2}$。Dirichlet积分的计算是下一章的重点。

瑕积分收敛性的判别法

瑕积分也可以类似地推出比较判别法和Dirichlet-Abel判别法。在对瑕积分使用比较判别法时，常用的比较函数是以0为瑕点的被积函数：

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{p-1}(\text{收敛}) & ,0<p\leq 1,\\ +\infty(\text{发散}) & ,p>1.\end{cases}\tag{28}$$

由于被积函数均以$x=0$为瑕点，当我们考虑瑕点非$x=0$的瑕积分时，常常使用换元的方法将瑕点挪到$x=0$处。下面的例题我们将贯彻这一想法：

例 5. 设参数$p,q>0$，讨论瑕积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$的收敛性。

分析：本题有0和$\frac{\pi}{2}$两个瑕点，且被积函数为非负函数。我们应该对两个瑕点分别用比较判别法讨论瑕积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$和瑕积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$的收敛性。在讨论瑕积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$的收敛性时，由于瑕点不是0，所以可以采用换元的方法先将瑕点化为0。

Proof. 首先考虑瑕点0的瑕积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$。当$x\to 0+0$时$\cos x\to 1$，并不影响被积函数的量级，我们对$\sin x$部分用等价无穷小代换：

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}}{\frac{1}{x^p}}=1,\tag{29}$$

因此$p<1$时瑕积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$收敛，$p\geq 1$时瑕积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$发散。

接着考虑瑕点$\frac{\pi}{2}$的瑕积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$，为了将瑕点转化为0我们做换元$y=\frac{\pi}{2}-x$得到

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}y}{\sin^p\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\cos^q\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}y}{\sin^q y\cos^p y}.\tag{30}$$

因此$q<1$时瑕积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$收敛，$q\geq 1$时瑕积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$发散。

综上，$p,q<1$时广义积分收敛，其余情况发散。 □

1.3 广义积分值的计算

对于广义积分而言，除了判断其收敛性，我们还要了解如何计算广义积分的值。包括Dirichlet积分$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$在内的许多广义积分，被积函数的原函数虽然不是初等函数

因而Newton-Leibniz公式失效，我们却可以使用一些只属于广义积分的特殊计算方法计算其值。我们在本节中将总结这些“属于广义积分”的特殊方法，这些方法将是含参变量积分和傅里叶级数部分的研究重点。

无穷积分的换元法和分部积分法

在此之前，我们先将定积分最常用的计算工具：换元法和分部积分法推广到无穷积分上。在瑕积分的推广也是类似的这里忽略。本节均考虑无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。

我们先从最基本的Newton-Leibniz公式来看。如果$f(x)$具有原函数$F(x)$（注：原函数不一定是初等函数但是一定存在），那么根据定义

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty}\int_1^X f(x)\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty}(F(X)-F(1)) = F(+\infty)-F(1). \tag{31}$$

这里$F(+\infty)$代表极限$\lim_{X\to+\infty}F(X)$，相当于原函数F在$+\infty$点的“函数值”。因此对于最简单的无穷积分，我们可以通过推广的Newton-Leibniz公式来计算其值。

这种用极限替代“无穷远点”函数值的方法，可以推广到无穷积分的换元法和分部积分中，我们下面分别讨论：

▶对于无穷积分我们依然可以推广换元法。我们假设$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta)$定义且可导，满足

$$a=\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(t)\leqslant\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t)=+\infty, \tag{32}$$

当t由α变化到β是函数值$\varphi(t)$始终在$[a,+\infty)$变化（常用的情况是$\varphi(t)$单调，此时这一条件成立）。此时换元公式成立

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{33}$$

可以看到，相较正常积分的换元法，无穷积分的换元法唯一的区别就是，在建立区间$[\alpha,\beta]$到区间$[a,+\infty)$的对应时，区间的边界β对应到无穷远点$\varphi(\beta)=+\infty$。在公式的条件和形式上，无穷积分和正常积分别无二致。

▶对于无穷积分我们依然可以推广分部积分法，我们假设函数$u(x)$和$v(x)$在$[a,+\infty)$可导，有分部积分公式

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x)\mathrm{d}x, \tag{34}$$

其中$u(x)v(x)$在无穷处函数值由极限定义

$$u(+\infty)v(+\infty)\triangleq\lim_{x\to+\infty}u(x)v(x), \tag{35}$$

如果此极限不存在，则不能使用上述分部积分公式。相较正常积分的换元法，无穷积分的分部积分法唯一的区别是用$u(x)v(x)$的极限替代无穷远点的函数值。

换元法的一个重要作用，是可以将瑕积分转化为无穷积分。考虑以0为瑕点的瑕积分$\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$，应用换元$y=\frac{1}{x}$得

$$\int_0^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{b^{-1}}^{+\infty}\frac{1}{y^2}f\left(\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y. \tag{36}$$

因此瑕积分和无穷积分本质是相同的。

换元法和分部积分法的存在使得我们可以越过计算原函数的复杂步骤，快速计算无穷积分的值。我们分别看两个例题：

例 6. 设参数$p>0$，计算下列无穷积分的值$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^p)}$。

分析：本题是非常经典的无穷积分计算题，考虑到微分关系$\mathrm{d}(\arctan x)=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，用换元$y=\arctan x$可以将无穷积分转化为正常积分，然后利用对称性求解。

Proof. 结合式子里$\frac{1}{1+x^2}$项，作换元$y=\arctan x$得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^p)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{1+\tan^p y}. \tag{37}$$

得到一个正常积分。我们可以用对称的方法，对积分继续换元$z=\frac{\pi}{2}-y$得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{1+\tan^p y} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{1+\tan^p\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^p z}{1+\tan^p z}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{1+\tan^p z}.\end{aligned} \tag{38}$$

由此

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^p)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{1+\tan^p y}=\frac{\pi}{4}. \tag{39}$$

□

例 7. 计算无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x$。

分析：在学习定积分时我们提到过，含$\arctan x$等反三角函数项的积分是非常适合用分部积分法求解化简的。

Proof. 在分部积分表达式(34)取$u(x)=\arctan x$和$v(x)=-\frac{1}{2x^2}$用分部积分法

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x=-\left.\frac{\arctan x}{2x^2}\right|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x. \tag{40}$$

注意到极限$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}=0$有此

$$-\left.\frac{\arctan x}{2x^2}\right|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{8}. \tag{41}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x &= \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x^2}-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2(1+x^2)}\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}-\arctan x\right)\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}.\end{aligned}\tag{42}$$

由此

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}.\tag{43}$$

□

广义积分值的计算思路

复杂广义积分的计算是很重要的课题，限定在高等数学范围内，大致的方法有几种：

- **直接原函数计算法.** 直接求出被积函数的原函数，利用广义积分的Newton-Liebniz公式计算。
- **换元法.** 利用换元法将广义积分转化为正常积分或其他容易计算的广义积分，然后采用正常积分的计算方法或其他方法计算。如此前的例题6就是此类方法。
- **分部积分法.** 利用分部积分法化简广义积分计算。如此前的例题7就是此类方法。
- **特殊积分法.** 最重要的两个特殊积分是Gauss积分$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$和Dirichlet积分$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，通过换元法和分部积分法将广义积分转化为特殊积分利用已知结果计算。后面的例题8就是此类方法。
- **含参变量积分法.** 通过将广义积分的被积函数表达为含参变量积分或含参变量无穷积分的形式，可以用含参变量积分的传递积分性质计算广义积分的值。下一章含参变量积分部分会重点讨论此方法。
- **B函数和Γ函数方法.** 利用B函数和Γ函数的性质计算积分。下一章含参变量积分部分会重点讨论此方法。

Gauss积分的性质

这一节我们从严格地无穷积分角度来回归Gauss积分。Gauss积分是指无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\tag{44}$$

其中很容易验证左侧无穷积分是收敛的。根据对称性也有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.\tag{45}$$

与Dirichlet积分类似，Gauss积分被积函数e^{-x^2}的原函数不是初等函数，我们是通过重积分的方法计算Gauss积分的值的：

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\\ &= \iint_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{+\infty}r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}\tag{46}$$

我们除了要掌握Gauss积分本身，还需要掌握通过换元法和分部积分法将积分转化为Gauss积分计算的方法。实际上，被积函数为e的指数上的二次多项式的广义积分都可以通过换元法转化为Gauss积分。设参数a是正实数，b和c是实数，我们可以计算积分$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$的值：（注：如果$a<0$广义积分不收敛，所以必须假设$a>0$）

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2+bx+c}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c+\frac{b^2}{4a}\right)\right]\mathrm{d}x\\ &= e^{c+\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2\right]\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^{c+\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\left(t^2\right)}{\sqrt{a}}\mathrm{d}t\text{（换元}t=\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\text{）}\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{c+\frac{b^2}{4a}}.\end{aligned}\tag{47}$$

上述无穷积分的一个简化形式是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a(x-\mu)^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}}.\text{（换元}t=\sqrt{a}(x-\mu)\text{）}\tag{48}$$

在概率学中，具有如下密度函数的随机变量被称为**服从正态分布**（也称Gauss分布）：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).\tag{49}$$

根据式(48)有$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=1$，这说明上述定义的正态分布密度函数是符合归一化条件的。正态分布是自然界最普遍存在且具有最纯粹随机性的概率分布，例如分子无规则运动Weiner过程（也称布朗运动）可以看作一系列正态分布随时间演变的结果。在后续的例题中我们会计算正态分布的数学期望是

$$\mathbb{E}X=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\mathrm{d}x=\mu,\tag{50}$$

以及方差

$$\mathrm{var}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2p(x)\mathrm{d}x=\sigma^2.\tag{51}$$

换言之，给定数学期望μ和方差σ^2就可以确定一个正态分布密度函数。

例 8. 设参数$\mu,\sigma>0$，函数$p(x)$如式(49)定义，计算下列积分：

1.$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2p(x)\mathrm{d}x$。

2.$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\mathrm{d}x$。

3.$I_3=\int_{-\infty}^{\infty}|x-\mu|p(x)\mathrm{d}x$

分析：本题为Gauss积分相关的计算题，通过换元法和分部积分将题目中的积分转化为Gauss积分计算。

Proof. **1.**考虑到$p(x)$指数式的复杂性，我们首先通过换元$y=\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}$化简问题：

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y, \tag{52}$$

为了将积分$\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$转化为Gauss积分，我们模仿不定积分中如下的分部积分思路

$$\int x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=-\int\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)=-\frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x. \tag{53}$$

应用于无穷积分得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}y^2e^{-y^2}dy=-\left.\frac{y\mathrm{e}^{-y^2}}{2}\right|_{y=-\infty}^{y=+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{54}$$

其中极限$\lim_{y\to\infty}y\mathrm{e}^{-y^2}=0$。因此无穷积分

$$I_1=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\sigma^2. \tag{55}$$

2.我们依然通过换元$y=\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}$化简无穷积分：

$$\begin{aligned}I_2&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{2\sigma^2}y+\mu\right)\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y+\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{56}$$

根据对称性$\int_{-\infty}^{+\infty}y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=0$，所以$I_2=\mu$。

3.我们还是通过换元$y=\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}$化简无穷积分，分别计算$x>\mu$和$x<\mu$部分：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mu}^{+\infty}(x-\mu)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\left.\left(-\frac{\mathrm{e}^{-y^2}}{2}\right)\right|_{y=0}^{y=+\infty}=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}. \tag{57}$$

同理（或利用对称性）也有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\mu}(\mu-x)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}. \tag{58}$$

因此$I_3=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}$。 □

2 经典习题

2.1 例题

题 1. 设参数$p>0$，讨论广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$的收敛性。

分析：本题为无穷积分，且当$p>1$时$x=0$为瑕点，故应将广义积分分为无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$和瑕积分$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$讨论。由于被积函数恒非负，故采用比较判别法。由于对数项的存在，本题在无穷积分部分的讨论方法和含对数的数项级数问题很像。

Proof. 先考虑无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$。当$x\to+\infty$时，被积函数$\frac{\ln(1+x)}{x^p}$的量级主要由分母决定，因此我们猜测收敛和发散的分界大致是$p=1$。对于$p>1$的情况，我们取参数$1<r<p$讨论极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x^p}}{\frac{1}{x^r}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{p-r}}=0,\tag{59}$$

由于无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^r}\mathrm{d}x$收敛，因此无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$收敛；对于$p\le 1$的情况，考虑

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x^p}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x^{1-p}\ln(1+x)=+\infty,\tag{60}$$

由于无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$发散，因此无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$发散。

再考虑瑕积分$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$，根据等价无穷小$\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$有

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x^p}}{\frac{1}{x^{p-1}}}=1,\tag{61}$$

因此当$p\ge 2$时由$\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}\mathrm{d}x$发散知$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$发散；当$p<2$由$\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}\mathrm{d}x$收敛知$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$收敛。从这里我们也可以看到只有$p>1$时$x=0$才是瑕点。

综上，广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$在$1<p<2$收敛，其余情况发散。 □

题 2. 设f是$[0,+\infty)$上的连续函数，定义f的*Laplace*变换为

$$L(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}f(x)\mathrm{d}x.\tag{62}$$

如果对于$s_0>0$无穷积分$L(s_0)$收敛，证明：对一切$s>s_0$无穷积分$L(s)$收敛。

分析：为了利用$L(s_0)$收敛条件，我们对$L(s)$拆分被积函数并使用Abel判别法。

Proof. 我们将$L(s)$写作

$$L(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-s_0)x}\left(\mathrm{e}^{-s_0x}f(x)\right)\mathrm{d}x. \tag{63}$$

用Abel判别法，取$a(x)=\mathrm{e}^{-(s-s_0)x}$和$b(x)=\mathrm{e}^{-s_0x}f(x)$。验证$a(x)$是$[0,+\infty)$上单调递减的非负有界函数，$b(x)$则满足积分$\int_0^{+\infty}b(x)\mathrm{d}x$收敛。所以$L(s)$收敛。 □

题 3. 对一切$x\in(0,+\infty)$，定义变上限瑕积分函数$F(x)=\int_0^x\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，回答下列问题
1.证明对一切$x\in(0,+\infty)F(x)$均收敛。
2.如果补充定义$F(0)=0$，讨论$F(x)$在点$x=0$是否可导。

分析：本题的瑕积分收敛性使用Dirichlet判别法是不难证明的。就讨论这种被积函数高频震荡的瑕积分而言，使用分部积分的方法转化函数$F(x)$的形式是很重要的方法。与本题被积函数$\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}$在$t\to 0+0$有关的极限性质，可以参考上册讲义求导一章。此外，如果觉得瑕积分难以处理，可以用换元$w=\frac{1}{t}$将瑕积分转化为无穷积分$\int_0^x\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_{x^{-1}}^{+\infty}\frac{\sin w}{w}\mathrm{d}w$处理。

Proof. **1.**为了使用Dirichlet判别法，取$a(t)=t$和$b(t)=\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}$，由此$a(t)$在$(0,x)$是单调函数且$\lim_{t\to0+0}t=0$；$b(t)$的正常积分有限，即对一切$y\in(0,x)$有

$$\left|\int_y^x\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right|=\left|\cos\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{y}\right|\le 2. \tag{64}$$

用瑕积分的Dirichle判别法，由$\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}=a(t)b(t)$知瑕积分$F(x)=\int_0^x\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$收敛。

2.讨论$F(x)$的在$x=0$的可导性。对于连续函数g的正常积分的变限积分$G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，我们有$G'(0)=g(0)$。如果被积函数$g(t)$在$t=0$不连续或形成瑕点，结论$G'(0)=g(0)$就不成立。本题被积函数$\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}$在点$t=0$为瑕点，显然不能直接得出$F(x)$在$x=0$可导的结论。我们需要应用分部积分的方法变形。

注意到积分关系式$\mathrm{d}\left(\cos\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}$有

$$\int_0^x\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t=t\cos\frac{1}{t}\bigg|_{t=0}^{t=x}-\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t=x\cos\frac{1}{x}-\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t. \tag{65}$$

这里使用极限$\lim_{t\to0+0}t\cos\frac{1}{t}=0$。此时积分$\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$中$t=0$虽然不是瑕点，但是被积函数$\cos\frac{1}{t}$在$t=0$不连续（第二类间断点）。我们再做一次分部积分，利用$\mathrm{d}\left(\sin\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t}$得到

$$\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t=-t^2\sin\frac{1}{t}\bigg|_{t=0}^{t=x}+2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t=-x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t. \tag{66}$$

由此

$$F(x)=x\cos\frac{1}{x}+x^2\sin\frac{1}{x}-2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t. \tag{67}$$

此时积分$\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$是正常积分，且被积函数在点$t=0$连续。我们分别使用导数的定义计算三项在0的导数

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\cos\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=0} &= \lim_{x\to 0+0}\cos\frac{1}{x}\text{发散}, && (68)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=0} &= \lim_{x\to 0+0}x\sin\frac{1}{x}=0, && (69)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\cos\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=0} &= t\sin\frac{1}{t}\Big|_{t=0}=0. && (70)
\end{aligned}
$$

结合上述知$F(x)$在$x=0$不可导。 □

题 4. *2021春季高数期末考试题*. 设f在$[0,+\infty)$连续，极限$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$存在且有限，参数$a,b>0$，证明无穷积分等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}. \tag{71}$$

分析：本题左侧积分为无穷瑕积分，是巧用换元法和定积分中值定理的题目，方法本身比较特殊，供各位同学开拓视野。

Proof. 将左侧的无穷积分写成正常积分极限的形式，考虑积分上下限$0<r<R<+\infty$：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{r\to 0+0,R\to+\infty}\left(\int_r^R\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_r^R\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\right). \tag{72}$$

对两项分别用换元法

$$\int_r^R\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x=\int_{ar}^{aR}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y=\int_{ar}^{aR}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.\text{（换元}y=ax\text{）}. \tag{73}$$

和

$$\int_r^R\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{br}^{bR}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y=\int_{br}^{bR}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.\text{（换元}y=bx\text{）}. \tag{74}$$

然后代入原式

$$
\begin{aligned}
&\int_r^R\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_r^R\frac{f(bx)}{x}\\
=&\int_{ar}^{aR}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{br}^{bR}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\\
=&\left(\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+\int_{br}^{aR}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right)-\left(\int_{br}^{aR}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right)\\
=&\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{75}
$$

对两个积分分别用推广版的定积分中值定理

$$\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(\xi_1)\int_{ar}^{br}\frac{\mathrm{d}x}{x}=f(\xi_1)\ln\frac{b}{a}, \tag{76}$$

其中$\xi_1 \in (ar, br)$，以及

$$\int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = f(\xi_2)\int_{aR}^{bR}\frac{\mathrm{d}x}{x} = f(\xi_2)\ln\frac{b}{a}, \tag{77}$$

其中$\xi_2 \in (aR, bR)$。代入得到

$$\int_r^R \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x - \int_r^R \frac{f(bx)}{x} = \int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}\left(f(\xi_1) - f(\xi_2)\right). \tag{78}$$

然后取$r \to 0+0$和$R \to +\infty$，此时根据ξ_1和ξ_2的选取可知$\xi_1 \to 0$和$\xi_2 \to +\infty$，就能得到需要的结论。 □

2.2 精选补充题

补 1. 计算无穷瑕积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$。（提示：模仿例题*6*）

补 2. 设参数$\alpha > 2$，函数$f(x)$在$[0, +\infty)$可导，且满足极限条件$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$和$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f'(x) = -1$，求证：无穷积分$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛。（提示：用比较判别法）

补 3. 判断无穷积分$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}\mathrm{d}x$的收敛性和绝对收敛性。（提示：模仿*Dirichlet*积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}$收敛性判别）

补 4. 设$f(x)$是$[1, +\infty)$单调连续函数，如果无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，证明$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$。（提示：根据函数极限定义应用反证法）