数项级数

谢彦桐
北京大学数学科学学院

April 27, 2022

1　知识内容理解

本讲义主要涉及课本10.1-10.3，内容为数项级数及其收敛性的判别。学习过程中应首先理解“级数收敛”的意义，然后熟悉级数收敛性的各种判别法。研究级数是从特殊到一般的过程，级数中最容易判别收敛性的是正项级数，比较判别法、d'Alembert判别法等可以有效判别正项级数的收敛性。对于给为普遍的一般项级数，比较特殊的是交错级数，用Leibniz判别法可直接判断部分交错级数的收敛性。最一般的一般项级数则需要借助比较复杂的Dirichlet-Abel判别法。如果上述方法皆不适用，这需要结合级数的具体特点使用收敛性的定义或是柯西准则研究。

一些英文注记：d'Alembert判别法（达朗贝尔判别法）、Raabe判别法（拉阿伯判别法）、Cauchy判别法（柯西判别法）、Leibniz判别法（莱布尼茨判别法）、Dirichlet-Abel判别法（狄利克雷-阿贝尔判别法）。判别法使用英文名系本人强迫症。

1.1　数项级数的概念

对收敛性的理解

给定序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，定义序列前n项的和为**部分和**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{1}$$

我们称部分和构成的序列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$构成的序列为**数项级数**，简记为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$。数项级数最重要的概念是收敛性，而数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛性的定义为部分和序列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$的收

敛性，如果部分和序列收敛，我们定义

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{2}$$

我们回忆序列的收敛性，其直观含义是序列项向某一个值的“聚拢”行为。那么对于级数而言，部分和的”聚拢“是比较难直观理解的。为此我们来看两个例子：

例子1. 等比序列$a_n = \frac{1}{2^n}$，由等比序列求和公式$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$，所以$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$，于是级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，并且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$。对于这个级数，随着$n$增大，序列$a_n$的值逐渐减小，使得部分和序列$S_n$的累积量逐渐减小，最终序列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛。

例子2. 等比序列$b_n = 2^n$，由等比序列求和公式$S_n = 2^{n+1} - 1$，所以$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$，于是级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$不收敛，也记做$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$。对于这个级数，随着$n$增大，序列$b_n$的值逐渐增大，使得部分和序列$S_n$的累积量越来越大，最终序列$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$发散到无穷。

例子3. 交错系列$c_n = (-1)^n$，很容易计算部分和$S_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$，因此$\lim_{n\to\infty} S_n$不存在，于是级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$不收敛。对于这个级数，随着$n$增大，序列$c_n$虽没有引起部分和序列$S_n$的增减变化，但是序列$S_n$的函数值始终在1和0两者变化，所以部分和序列$S_n$不收敛。

从上述分析我们可以看到，收敛的级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，如果想要S_n向某值“聚拢”，就必须a_n的值逐渐减小，使得S_n每次的累加量减小；发散的级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$则体现了级数发散的两种情况：前者因为b_n过大使得部分和序列S_n累积量过大并趋于无穷；后者因为c_n的正负震荡使得序列S_n一直震荡于0和1未能向某值“聚拢”。

我们总结上述分析，不难得到关于级数收敛性的第一个定理：

定理 1. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，那么$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

定理1告诉我们，为了部分和序列S_n收敛“聚拢”，级数的项a_n必须“逐渐变小”而收敛于0。另一个关于级数收敛性的重要定理是**柯西准则**：

定理 2. 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充分必要条件是，对于$\forall \varepsilon > 0$，存在$N \in \mathbb{N}$，如果$n > m > N$就一定有$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$。

我们注意到部分和的差$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$，就可以将柯西准则理解为序列极限柯西准则在部分和序列上的直接应用。

最后我们介绍两类重要的级数，其收敛性对于其他级数收敛性的判别有指导意义：

- 等比级数$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$，其中参数$q > 0$。对于$q \geq 1$，等比级数$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$发散；对于$0 < q < 1$，等比级数$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$收敛。

- p级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，其中参数$p>0$。对于$p>1$，$p$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散；对于$0<p\leq 1$，$p$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛。

最后我们指出定理1和定理2（柯西准则）是判别级数收敛性最基本的两种方法，虽然它们因为形式过于复杂而常常不用于做题；其中定理1的$\lim_{n\to\infty}a_n=0$是级数收敛的必要条件，因此如果$\lim_{n\to\infty}a_n$不收敛于0，我们可以判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；如果仅有$\lim_{n\to\infty}a_n=0$我们还不能断言$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，例如$p\geq 1$的p级数即是反例。

例 1. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是一个数项级数，有如下三个命题：
1.级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。
2.$\lim_{n\to\infty}a_n=0$。
3.对一切正整数p都有$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=0$。
请判断上述三个命题两两之间的充分必要关系。

分析：本题为定理1的推广，用以增强同学们对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛性与$\{a_n\}$收敛性关系的理解。

Proof. 命题**1**和命题**2**的关系为充分不必要条件。根据定理1，命题**1**可以推出命题**2**，而命题**2**推不出命题1：考虑1级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散级数，而$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。

命题**2**和命题**3**的关系为充分必要条件。在命题**3**中取定$p=1$即推出命题**2**。现在假设命题**2**成立，那么

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}, \tag{3}$$

根据序列极限可加性，左侧对求和式求极限，右侧对p项分别求极限，考虑到右侧p项的极限都是$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=p\lim_{n\to\infty}a_n=0, \tag{4}$$

因此命题**2**可以推出命题**3**。 □

在此我们重新理解p级数的收敛性。对于1级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$而言，虽然其单项极限$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但是级数依然发散。究其原因，就是逐项$\frac{1}{n}$的累积“不够小”，使得即便$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$也没有阻止部分和趋于无穷的脚步。相较而言，如果$p<1$，$p$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$就收敛了，这一情况逐项$\frac{1}{n^p}$的累积“就够小”了。对于$p$级数的收敛性，1形成收敛与发散（或逐项累积“够不够小”）的分界。

级数的性质

本节我们介绍级数的一些性质。由于级数收敛的本质是部分和序列的收敛性，因此级数的各个性质都可以类比到序列极限的性质：

- **级数的加减** 考虑两个收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$也收敛，并且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$。这一性质对应序列极限的加减法性质。

- **级数的数乘** 考虑收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$c \in \mathbb{R}$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n)$也收敛，并且$\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$。这一性质对应序列极限的数乘性质。

- **有限项的改变** 如果改变序列$\{a_n\}$中的有限项，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性不会改变。这一性质对应序列极限有限项的改变性质。

- **级数添括号** 如果我们将收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$添加括号，得到的新级数仍然收敛。这一性质对应序列极限中子列的收敛性。对于发散的级数，添加括号可能导致原来发散的级数收敛。

最后我们简单说明，设收敛的数项级数构成一个线性空间：考虑

$$S = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛} \right\}. \tag{5}$$

那么S构成线性空间。此时我们可以把序列$\{a_n\}$看作一个有无穷项的向量，它是欧式空间有限维向量的推广。

1.2 正项级数

由于级数部分和序列常常不可求，直接使用柯西准则很难判别级数的收敛性。接下来我们将顺着从特殊到一般的顺序研究级数收敛性的判别。最特殊的数项级数是正项级数，即每一个$a_n \geq 0$的级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$。正项级数有很多判别方法，这些方法可以分为两类：依赖依赖其他级数的比较判别法和不依赖其他级数直接使用特点公式的公式型判别法（如D'Alembert判别法、Cauchy判别法、Raabe判别法、积分判别法）。

正项级数的性质

我们首先了解正项级数的一些性质。我们回顾此前给出关于级数敛散性的三个例题，其中级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$的发散是源自部分和序列在0和1的震荡，导致部分和序列发散。对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$而言，其部分和序列S_n是单调递增的，所以不可能出现“震荡”现象。根据序列极限的单调有界原理：S_n有界，对应$\lim_{n\to\infty} S_n$收敛；S_n无界，对应$\lim_{n\to\infty} S_n$发散。由此我们总结了下述命题

定理 3. 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充分必要条件是部分和序列$\{S_n\}$有界。

由此我们可以总结出正项级数的收敛性的两种情况：

- 对于收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，其项a_n较小使得部分和S_n始终有界。
- 对于发散的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，其项a_n较大使得部分和S_n无界并趋向无穷。

借助上述理论，我们可以讨论著名的“阿喀琉斯追乌龟”悖论（芝诺悖论）。乌龟和阿喀琉斯赛跑，乌龟的起点位于阿喀琉斯身前10米处，而阿喀琉斯的速度是乌龟的10倍。当阿喀琉斯跑到了10米到达乌龟的起点时，乌龟领先着1米，当阿喀琉斯跑完下一个1米时，乌龟又前进了0.1米。以此类推，阿喀琉斯看似永远追不上乌龟，因为乌龟始终领先阿喀琉斯一点点。得出这一悖论的原因，在于阿喀琉斯跑步路程是级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n-2}}$，这一级数收敛因而部分和序列有界，也就是说乌龟只能在一个有限的路程里领先阿喀琉斯，此后阿喀琉斯就超过了乌龟。

比较判别法

比较判别法分为“直接比较法”和“量级比较法”两种，前者是后者的基础，而后者在做题中应用更广。首先介绍直接比较法：

定理 4. 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$是两个正项级数，如果存在参数$C > 0$和$N \in \mathbb{N}^*$使得$a_n \leq Cb_n$对一切$n > N$成立，那么
1.如果$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，那么$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。
2.如果$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，那么$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散。

直接比较法的实质是借助了极限收敛性和部分和有界性的关系：不妨设参数$C = 1$，如果$a_n \leq b_n$成立，这说明序列$\{a_n\}$的项比序列$\{b_n\}$的项小，由此级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$部分和的有界性蕴含着级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$部分和的有界性，由此如果$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛蕴含$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。另一方面，由于级数改变有限项并不影响敛散性，所以我们只需$a_n \leq Cb_n$对足够大的$n > N$成立就可以使用比较判别法。

直接比较法使我们意识到，似乎项$\{a_n\}$的值更小的级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$更容易收敛，项$\{a_n\}$的值更大的级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$更容易发散。我们通过无穷小量量级的概念，可以给出下述的量级比较法

定理 5. 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$是两个正项级数，设极限$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = c$，那么
1.如果c是正实数，那么$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$具有相同的敛散性。
2.如果$c = 0$，那么$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛蕴含$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散蕴含着$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

3.如果$c=\infty$，那么$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛蕴含$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散蕴含着$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散。

我们不妨假设序列$\{a_n\}$和序列$\{b_n\}$都是无穷小量（即$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$）。如果$c$是正实数，说明$a_n$和$b_n$是同阶的无穷小量，因此可以认为$a_n$和$b_n$差不多大，所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$具有相同的敛散性；如果$c=0$，说明$b_n$是比$a_n$更高阶的无穷小量（即收敛于0的速度更快），因此可以认为b_n比a_n更小，所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛蕴含着$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛。

有了量级比较法，当我们想判断$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性时，我们只需要另取敛散性已知的比较级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，如果$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$是正实数，那么$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$相同。一个重要问题是，敛散性已知的比较级数如何选取。最为常用的是等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}q^n$和p级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$。

例 2. 判断下列正项级数的敛散性
1.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$。
2.$\sum_{n=1}^{\infty}n^p\left(2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$，其中$p$为正实数。
3.$\sum_{n=1}^{\infty}-\ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)$。

分析：本题是标准的比较判别法的题目，其关键是要对题目的级数的“大小”有所估计。对于第一个级数，序列$\frac{5^n}{n!}$的分母是比分子更高阶的无穷大量，借助不等式放缩的语言可以选择等比级数作为比较级数。第二个和第三个级数需要选取合适的p级数作为比较级数，其中第二个级数借助有理化代数变形研究无穷小量$2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$的量级，第三个级数利用等价无穷小变换的方法给出$\ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)$的量级。

Proof. **1.**当$n\geq 6$时有

$$\frac{5^n}{n!}=\frac{5}{1}\times\frac{5}{2}\times\cdots\times\frac{5}{n}\leq\frac{5^5}{5!}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}. \tag{6}$$

显然$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}$是收敛的等比级数，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$收敛。

2.做有理化变形

$$\begin{aligned}&2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\\=\ &\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}\\=\ &\frac{2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}\sim\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}},\end{aligned} \tag{7}$$

这里符号$\sim$代表等价的无穷小量。因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^p}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-p}}}=\frac{1}{4}, \tag{8}$$

亦即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p\left(2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-p}}}=\frac{1}{4},\tag{9}$$
是一个有限值，因而级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^p\left(2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-p}}$收敛性一致。因此当$\frac{3}{2}-p>1$即$p<\frac{1}{2}$时级数收敛，$p\geq\frac{1}{2}$级数发散。

3.令$x\to 0$，我们回忆此前学过的等价无穷小关系$x\sim\sin x$和$x\sim\ln(1+x)$，由此分析无穷小量$\ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)$的量级:
$$-\ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)=-\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)\sim 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sim 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2,\tag{10}$$
因此
$$\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{2},\tag{11}$$
因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}-\ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$敛散性一致，都是收敛级数。 □

公式型判别法

我们下面介绍各种判别法的使用情形，只需依据题目级数的特征选择合适的判别法。其中D'Alembert判别法和Cauchy判别法的证明都是通过取等比级数为比较级数，使用比较判别法证明，这种方法有时会在证明题中使用，有余力的同学建议掌握。

D'Alembert判别法

■计算极限$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$，根据$l$的大小判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性。
■判别法的具体内容：如果$l>1$级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；如果$l<1$级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；如果$l=1$或极限$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$发散，D'Alembert判别法失效。
■通常用于含分式或阶乘的级数，此时商$\frac{a_{n+1}}{a_n}$级数比较简单。
■极限$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$可以理解为当$n$足够大时$a_n$接近以$l$为公比的等比数列，因此可以根据$l$与1的大小关系来判别$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛性。

Raabe判别法

■Raabe判别法用以处理D'Alembert判别法无法判断的极限$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$的情形。
■计算极限$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l$，根据$l$的的大小判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性。
■判别法的具体内容：如果$l<1$级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；如果$l>1$级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；如果$l=1$或极限$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$发散，Rabee判别法失效。
■实际上，如果$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$或$<1$，此时Raabe判别法与D'Alembert判别法效果完全一致。

Cauchy判别法

■计算极限$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$，根据$l$的大小判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性。
■判别法的具体内容：如果$l61$级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；如果$l<1$级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；如

果$l=1$或极限$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$发散，Cauchy判别法失效。

■通常用于含方幂的级数，此时根式$\sqrt[n]{a_n}$级数比较简单。

■极限$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$可以理解为当$n$足够大时$a_n$接近以$l$为公比的等比数列，因此可以根据$l$与1的大小关系来判别$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛性。

例 3. 判断下列正项级数的敛散性

1.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n n!}{n^n}$，其中$p$为正实数。

2.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$。

3.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{2^{qn}}$，其中$p,q$为正实数。

分析：本题的三个小问依次使用D'Alembert判别法、Raabe判别法和Cauchy判别法可做；第一小问的阶乘形式非常适合D'Alembert判别法，第二小问D'Alembert判别法失效但是可以使用Cauchy判别法，第三问的方幂形式非常适合Cauchy判别法。

Proof. **1.**用D'Alembert判别法，首先考虑极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{p^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{p}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\begin{cases}>1, & p>\mathrm{e},\\ =1, & p=\mathrm{e},\\ <1, & p<\mathrm{e},\end{cases}\tag{12}$$

因此$p>\mathrm{e}$时级数发散，$p<\mathrm{e}$时级数收敛，$p=\mathrm{e}$时判别法失效。这时我们可以使用Rabee判别法判别，但是由于Raabe判别法涉及复杂极限的计算，我们换一种思路：我们只要能说明极限$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n}$不是0，就能说明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n}$发散。我们注意到

$$\frac{\frac{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n}}=\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1,\tag{13}$$

因此序列$\left\{\frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n}\right\}$是单调递增的正序列，因此$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n}$不是0。根据定理1，$p=\mathrm{e}$时级数发散。综上，$p\geq\mathrm{e}$时级数发散，$p<\mathrm{e}$时级数收敛

2.由于D'Alembert判别法失效，用Raabe判别法

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2},\tag{14}$$

因此级数发散。

3.用Cauchy判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^p}{2^{qn}}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^p}{2^q}=\frac{1}{2^q}<1,\tag{15}$$

极限的计算利用了$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。因此级数收敛。

□

积分判别法

积分判别法是一种局限性很大的判别法，几乎只在特定例题使用。然而积分判别法将级数和积分联系起来，这种“离散”的级数和“连续”的积分二者的对应，是很有价值的数学思想。我们以p级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$为例，将级数对应无穷积分（积分的极限）：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\approx\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x, \tag{16}$$

相较级数的部分和，积分是更容易计算的，我们希望积分极限$\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$的收敛性与$p$级数的收敛性相同，根据Newton-Liebniz公式有

$$\int_1^n\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)n^{p-1}} & ,p>1\\ \ln n & ,p=1,\\ \frac{n^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p} & ,p<1.\end{cases} \tag{17}$$

由此可见p级数在$p\geq 1$时发散，在$p<1$时收敛。$p=1$作为临界点，原函数的形式是不同的。

我们指出积分和级数的对应(16)不是总成立的，需要一定条件，为此我们整理积分判别法的形式：

定理 6. 设$f(x)$是在$[1,+\infty)$定义的非负可积函数，如果存在X，当$x>X$后$f(x)$是单调递减的函数，那么积分极限$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$和正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$具有相同的收敛性。

相较课本的定理，定理6只要求$f(x)$在x足够大时单调递减，这是因为级数/极限的前若干项的改变并不影响收敛性。

积分判别法最经典的应用是证明级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散，因为

$$\int_2^n\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln\ln n-\ln\ln 2\to\infty. \tag{18}$$

这个级数如果用常规的比较判别法，是无法判断的。

从级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$出发，结合后续关于对数级数的几个例题，我们可以加深对于p级数收敛性的理解。一方面，我们显然有$\frac{1}{n\ln n}\leq\frac{1}{n}$，所以1级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的发散推不出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$的发散；另一方面，对任意$p>1$，无穷小量$\frac{1}{n\ln n}$的量级都比$\frac{1}{n^p}$的量级低，因为对数$\ln n$对无穷小量量级的影响是有限的，然而由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的收敛也推不出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$的收敛。因此仅仅用比较判别法是无法判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$的，因为$\frac{1}{n\ln n}$夹在$p$级数收敛范围$p>1$和发散范围$p\leq 1$临界之间。

抽象级数问题

数项级数特别是正项级数的部分证明题，涉及的级数由未知序列a_n确定，这类问题称为抽象级数问题。由于a_n的具体形式未知，这类问题的证明方法除了需要结合比较判别法和公式判别法，也常常需要用到柯西准则（定理2）甚至定理1等结论，更具技巧性。我们简要给出解决这类问题的一些思路：

■可以为未知序列a_n赋以特定取值，去实践题目中级数的性质，以确定证明方向。

■定理1、定理2（柯西准则）、定理3这三个在常规级数收敛性判别中不常用的方法，在抽象级数敛散性判别时可能有特别的意义。

■部分例题可能需要模仿D'Alembert判别法或Cauchy判别法的证明思路来做，因此时间允许建议掌握这些证明。

例 4. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$满足$a_n > 0$，极限$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = l$，其中$l$可以是实数或$\infty$，那么

1.若$l > 1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

2.若$l < 1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

分析：注意到题目从形式上接近D'Alembert判别法，解题时可以仿照D'Alembert判别法的证明，用比较判别法证明本题。以第一问为例，我们证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的核心思路，是找到一个比a_n"更大"的收敛级数作为比较级数。

Proof. **1.**如果$l > 1$，取一个常数$l > r > 1$，根据极限的有界性，存在$N \in \mathbb{N}^*$，对一切$n > N$都有

$$n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) > r, \tag{19}$$

因此

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \mathrm{e}^{\frac{r}{n}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^r, \quad \forall n > N, \tag{20}$$

换言之

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^r, \quad \forall n > N. \tag{21}$$

通过叠乘计算

$$a_{N+k} = a_{N+1}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} < a_{N+1}\left(\frac{N+1}{N+k}\right)^r. \tag{22}$$

由于我们需要讨论级数$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$的收敛性，我们选择比较级数$\sum_{k=1} a_{N+1}\left(\frac{N+1}{N+k}\right)^r$作为比较级数，通过观察该级数与$r$级数具有相同的量级

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{N+1}\left(\frac{N+1}{N+k}\right)^r}{\frac{1}{k^r}} = a_{N+1}(N+1)^r, \tag{23}$$

再由r级数收敛得到级数$\sum_{k=1} a_{N+1}\left(\frac{N+1}{N+k}\right)^r$收敛，最后级数$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$收敛。

我们补充，我们得到中间结论$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^l < 1$时，不可以直接用D'Alembert判别法，因为即便$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$推不出$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$，特别地极限$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$可能发散。我们必须重复一遍类似D'Alembert判别法的证明方法。

2.$l < 1$的情况与$l > 1$完全一致，只是注意放缩的细节上，我们需要找到一个比级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$"更小"的发散级数。

□

1.3 一般项级数

我们这里用一般项级数指代正项级数以外的级数。一般项级数比正项级数更为普遍，只有比较简单的一般项级数可以判别其收敛性，对于过于复杂的一般项级数其收敛性也可能很难判别。

绝对收敛和条件收敛

一个简单的问题是，如果能把一切一般项级数都转化为正项级数判别收敛性，会大大简化一般项级数收敛性问题的难度。正因如此，人们给出了下面的定理

定理 7. 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是一般项级数，如果正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛，那么$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。特别地，如果一个一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$满足$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛，称$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$**绝对收敛**。

我们可以看到，绝对收敛蕴含着收敛，如果能验证正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$是收敛的，可以直接得到$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的结论。事与愿违，很多一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$并不绝对收敛，此时一般项级数仍然有收敛和发散两种可能。因此，对于一个一般项级数，其收敛情形包括三种：绝对收敛，不绝对收敛但是收敛（称为**条件收敛**）和发散。下面我们通过三个例子直观理解一般项级数的三种收敛情形：

例子1. 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$。由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$收敛。对于这样一个级数，虽然其部分和序列$S_n$是加减震荡的，但是由于绝对收敛性保证了震荡的总幅度不大，因此交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$收敛。

例子2. 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$。由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$不绝对收敛；但是根据Leibniz判别法可以得到交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$收敛，因此这一级数条件收敛。对于这样一个级数，部分和序列S_n仍然是加减震荡的，并且震荡的总幅度是足够大的，然而由于反复地加减抵消，并没有导致交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$本身发散。

例子3. 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$。这一级数是发散的。对于这样一个级数，部分和序列$S_n$本身的震荡幅度就过于巨大，并导致交错级数本身发散，由此取绝对值以后得到的代表震荡总幅度的级数$\sum_{n=1}^{\infty} 1$也是发散。

从上述几个例子可以看出，如果一般项级数$\sum a_n$是不断加减震荡的，绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$代表着一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的“总震荡幅度”。这也可以解释为什么绝对收敛意味着收敛，因为在总震荡幅度有限的情况下，然后加减震荡都不可能使得级数发散。

在本节中，所有涉及判断一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛性的题目，都要求区分绝对收敛、条件收敛和发散。我们在解题过程中，一般优先判断绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$是否收敛，先得到$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的绝对收敛结论；如果级数不绝对收敛，再判别$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是否收敛。

重排

下面我们简要讨论级数的重排问题。给定一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，所谓重排，就是选择将正整数列$1,2,\cdots,n,\cdots$重新排成序列$i_1,i_2,\cdots,i_n,\cdots$，每个正整数都要在新序列恰出现一次。我们想研究新排布的序列对应新级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_{i_n}$是否收敛，如果收敛，其极限是否与原级数极限一致。

课本上证明了，如果级数绝对收敛，那么重排以后依然绝对收敛：

定理 8. 如果一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，那么重排后的新级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_{i_n}$也绝对收敛，并且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{i_n}$；特别地，收敛的正项级数重排以后依然收敛，发散的正项级数重排后依然发散。

将绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$看作“总震荡幅度”，可以方便我们理解重排定理。由于绝对收敛意味着总震荡幅度$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$，自然地，如何改变加减震荡的顺序都可以保证级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛性不变。如果总震荡幅度$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散了，那么在重排过程中就有可能“很糟糕地”使得加减震荡无法很好地抵消，导致重排后的级数不在收敛。

在解题过程中，部分绝对收敛的级数（或正项级数）可以借助重排将原级数转化为一个更为简单的新级数。

交错级数

所谓交错级数，是指隔项符号相反的级数，一般写作形式$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$，其中每一个$u_n>0$。Leibniz判别法是判别交错级数收敛性最简单的方法，其叙述是：

定理 9. 如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$满足$\lim_{n\to\infty}u_n=0$和$u_n$单调下降，那么$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$收敛。

关于Leibniz判别法，我们有几点释疑：

■部分同学可能认为，$\lim_{n\to\infty}u_n=0$和u_n单调下降是十分接近的两个条件，Leibniz判

别法的两个条件是否有些冗余。实际上我们可以证明交错级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$是发散的级数，其满足$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}=0$，但是不满足单调下降性。因此Leibniz判别法的两个条件都不可忽略。

■Leibniz判别法只能说明满足$\lim_{n\to\infty}u_n=0$和u_n单调下降两个条件的级数收敛，如果两个条件之一不满足，交错级数可能收敛也可能发散。总的来说，Liebniz判别法条件是十分苛刻。对于更普遍的交错级数，我们可能需要其他判别法。

最重要的交错级数是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，这一级数的地位与正项级数的$p$级数地位等同，是必须牢记的例子。用Leibniz判别法可以证明，对一切$p>0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$收敛。更一般地，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$在$p>1$时绝对收敛，在$0<p\le 1$条件收敛。

例 5. 设p都是正实数，判断一般项级数收敛性$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p$。

分析：作为交错级数，应首先判别绝对收敛性再判别条件收敛性。绝对收敛性涉及cos，可利用等价无穷小方法选p级数作为比较级数。条件收敛性可以结合Leibniz判别法。

Proof. 首先考虑级正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p$，根据等价无穷小理论有

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p=2^p\sin^{2p}\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{2^p}{n^{2p}},\tag{24}$$

亦即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p}{\frac{1}{n^{2p}}}=\frac{1}{2^p},\tag{25}$$

因此正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p$的收敛性与$2p$级数正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$的收敛性一致：$p>\frac{1}{2}$时收敛，$0<p\le\frac{1}{2}$时发散。

接着考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p$的收敛性，根据Leibniz判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p=0,$$

并且当n增大时，$1-\cos\frac{1}{n}$单调递减，因此$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p$是单调递减序列，交错级数总收敛。

综上，$p>\frac{1}{2}$时级数绝对收敛，$0<p\le\frac{1}{2}$时级数条件收敛。 □

Dirichlet-Abel判别法

Dirichlet-Abel判别法本身形式类似，证明等价，因此合称同一判别法，以免记忆混淆。Dirichlet-Abel判别法用于判别写成乘积的一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$的收敛性，当序列$a_n$和$b_n$满足一定性质，一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。具体情形整理如下：

	Dirichlet判别法	Abel判别法
$\{a_n\}$的性质	$a_n \to 0$且a_n单调	a_n有界且单调
$\{b_n\}$的性质	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$部分和有界	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛
结论	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛

对于Dirichlet-Abel判别法的理解，我们总结如下

■ 如果想对一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$应用Dirichlet判别法或Abel判别法，必须首先设法拆分$u_n = a_n b_n$。

■ Abel判别法比Dirichlet判别法对序列b_n要求更高，相应地Abel判别法对序列a_n要求更低，因此结论是相同的。实际上，两个判别法在证明上也等价。

■ Leibniz判别法是Dirichlet判别法最直接的特例，因为序列$b_n = (-1)^n$对应级数部分和有界。

■ Dirichlet判别法和Abel判别法对于a_n和b_n的要求过于抽象，我们简要总结积累常见的b_n的选取方式。序列$b_n = (-1)^n$和$b_n = \cos(n\theta)$（其中$\theta \neq 2k\pi$）是两类满足部分和有界但不收敛的级数，常常作为Dirichlet判别法的b_n使用。序列$b_n = \frac{(-1)^n}{n^p}$（$p > 0$）和序列$b_n = \frac{\cos(n\theta)}{n^p}$（$p > 0$且$\theta \neq 2k\pi$）确定两类收敛级数，常常作为Abel判别法的$b_n$使用。

关于余弦级数$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta)$（其中$\theta \neq 2k\pi$）部分和的有界性，可以通过裂项法得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) &= \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} + \cos 2\theta\sin\frac{\theta}{2} + \cdots + \cos n\theta\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{(2n+1)\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned} \tag{26}$$

由此

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}. \tag{27}$$

对于正弦函数，我们也可以证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta)$（这里$\theta$可以取任意实数）是部分和有界的序列，这两个关于三角函数列部分和的结论都可以直接使用。

下面我们看一个简单的例题，来理解Dirichlet判别法和Abel判别法的意义：

例 6. 设p为正实数，判断一般项级数收敛性$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$。

分析：本题的绝对收敛部分由比较判别法可得，收敛部分由Dirichlet判别法可得。其中，$p \leq 1$时，级数不绝对收敛的判定是比较特殊的，这一部分希望同学记下来，因为后续学习广义积分时还会反复使用这一方法。

Proof. 为了方便理解，我们先看收敛性。注意到序列$a_n = \frac{1}{n^p}$单调递减且收敛，序列$b_n \sin n$部分和有界，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$收敛。

我们首先来看绝对收敛性，考虑到$\sin n$是有界的，因此$\frac{|\sin n|}{n^p}$的量级应当与$\frac{1}{n^p}$相当。当$p>1$时由于$\frac{|\sin n|}{n^p}\le\frac{1}{n^p}$，由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^p}$收敛；当$p\le 1$时，我们可以证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^p}$发散，这一证明的思路比较特殊：我们对级数放缩

$$\frac{|\sin n|}{n^p}\ge\frac{\sin^2 n}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2n}{n^p}. \tag{28}$$

用Dirichlet判别法有$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n^p}$是收敛的，而$p$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$是发散的，所以正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^p}$是发散的。根据比较定理，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^p}$发散，因此$p\le 1$时级数$\frac{\sin n}{n^p}$不绝对收敛。

综上，$p>1$时级数绝对收敛，$0<p\le 1$时级数条件收敛。

□

我们现在通过一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}$的收敛来谈谈Dirichlet-Abel判别法的意义。级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}$可以看作对$p$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的“加权求和”。我们知道，随着$n$增大取遍所有自然数，$\sin n$的取值在区间$[-1,1]$上来回震荡，且震荡没有规律，$\sin n$取正值和负值的“概率”是一致的。因此项$\frac{1}{n^p}$对级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n^p}$的贡献由“权值”决定，有着相等的机会增大部分和和减小部分和。由此“权值”的影响使得级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$具有更“温和”的收敛性。

例 7. 设p为正实数，判断下列一般项级数收敛性
1.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$。
2.$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{\sin n}{n^p}$。

分析：应用Dirichlet-Abel判别法的关键，在于如何拆出a_n和b_n。常用的b_n是我们之前提及的几类，我们应首先在给出的范围里拆b_n。

Proof. **1.**先讨论级数绝对收敛性，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1, \tag{29}$$

因此正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$与$p$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛性一致，即$p>1$时收敛，$0<p\le 1$发散。

接着考虑级数收敛性。由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$，一种直接的拆分方法是$a_n=\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$和$b_n=(-1)^n$，应用Dirichlet判别法（这时Dirichlet判别法与Leibniz判别法一致）。然而序列$\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$的单调性不容易证明。

我们考虑另一种级数拆分$a_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$和$b_n=\frac{(-1)^n}{n^p}$，此时$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$是收敛的级数，$\lim_{n\to\infty}a_n=1$因而$\{a_n\}$有界，还需要证明单调性：考虑$x_n=\ln(a_n)=-\frac{\ln n}{n}$，

根据求导可知$\frac{\ln n}{n}$在$n \geq 3$时单调递减，所以$\{a_n\}$在$n \geq 3$时单调递增。根据Abel判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$收敛。结

综上，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$在$p > 1$时绝对收敛，$0 < p \leq 1$条件收敛。

2.先讨论级数绝对收敛性，显然有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{|\sin n|}{n^p}}{\frac{|\sin n|}{n^p}} = \mathrm{e}, \tag{30}$$

而在上一例中我们已经讨论过正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^p}$的收敛性，根据比较判别法得到级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{\sin n}{n^p}$在$p > 1$时绝对收敛，在$0 < p \leq 1$时不绝对收敛。

接着考虑级数收敛性。一种直接的拆分方法是$a_n = \frac{1}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$和$b_n = \sin n$，此时$b_n$部分和虽然有界，但是$a_n$的单调性比较难证明。我们考虑拆分$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$和$b_n = \frac{\sin n}{n^p}$，根据上一例$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，而$a_n$有界且单调，根据Abel判别法，我们得到级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{\sin n}{n^p}$收敛。

综上，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{\sin n}{n^p}$在$p > 1$时绝对收敛，$0 < p \leq 1$条件收敛。 □

*Abel变换

Abel变换是证明Dirichlet-Abel判别法的重要步骤，学有余力的建议掌握Abel变换的技巧，学会在证明题中模仿Abel变换处理形如$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$的有限项求和或级数。

我们指出，Abel变换是将有限项求和$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$进行变形，形成与序列$\{b_n\}$的部分和有关的求和式的方法，是初等数学变形，只是形式上涉及了$\sum$符号，显得有些复杂，其形式为

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k + a_n B_n, \tag{31}$$

其中$B_k = \sum_{l=1}^{k} b_l$是$\{b_k\}$的部分和序列。Abel变化的实质，是将$\{a_k\}$和$\{b_k\}$的乘积和转化为$\{a_k\}$逐项差和$\{b_k\}$部分和的乘积和。

剥离$\sum$符号，我们可以从方法上记忆Abel变换。Abel变换的核心步骤是用序列$\{b_k\}$的部分和序列表示$\{b_k\}$：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(B_k - B_{k-1}\right) \\
&= a_1 B_1 + a_2 \left(B_2 - B_1\right) + a_3 \left(B_3 - B_2\right) + \cdots + a_n \left(B_n - B_{n-1}\right) \\
&= B_1 \left(a_1 - a_2\right) + B_2 \left(a_2 - a_3\right) + \cdots + B_{n-1} \left(a_{n-1} - a_n\right) + a_n B_n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) B_k + a_n B_n,
\end{aligned} \tag{32}$$

其中第一个等式是将b_k用部分和$B_k - B_{k-1}$表示，第三个等号是将第二行中相邻的括号里有关同一个B_k的项提出来，得到项$(a_k - a_{k+1}) B_k$。

最后，我们用一个例题来实践Abel变换，读者也可以自己尝试用Abel变换复现Dirichlet判别法的证明：

例 8. 设序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$分别满足如下性质：$\{a_n\}$的部分和$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$有界，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$收敛且$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$。证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

分析：本题旨在练习模仿Dirichlet-Abel判别法的方式，结合柯西准则证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

Proof. 模仿Dirichlet判别法的证明方法，对连续相邻项的求和用Abel变换：

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_{n+p} b_{n+p} - S_n b_{n+1}, \end{aligned} \tag{33}$$

为了利用柯西准则，我们对求和式放缩

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| + |S_{n+p}| \cdot |b_{n+p}| + |S_n| |b_{n+1}|. \tag{34}$$

由于部分和$\{S_n\}$有界，设$|S_n| < M$对一切n成立，那么

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le M \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k - b_{k+1}|\right) + M (|b_{n+1}| + |b_{n+p}|). \tag{35}$$

我们的目标是对一切$\varepsilon > 0$，都找到足够大的N，使得对一切$n > N$都有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon$。

我们首先对收敛正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$用柯西准则，存在$N_1 \in \mathbb{N}^*$使得

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k - b_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \forall n > N_1,\, p \in \mathbb{N}^*. \tag{36}$$

再结合$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$，取足够大的$N_2 \in \mathbb{N}^*$使得

$$|b_{n+1}|, |b_{n+p}| \le \frac{\varepsilon}{4M}, \quad \forall n > N_2,\, p \in \mathbb{N}^*. \tag{37}$$

现在我们取$N = \max\{N_1, N_2\}$，对一切$n > N$有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| &\le M \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k - b_{k+1}|\right) + M (|b_{n+1}| + |b_{n+p}|) \\ &\le M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) = \varepsilon. \end{aligned} \tag{38}$$

结合柯西准则，这说明$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。 □

2 经典习题

2.1 例题

题 1. 设参数p是正实数，判断正项级数收敛性$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^{\ln n}}$。

分析：本题为经典例题，采用对数运算化简正项级数判断收敛性。

Proof. 注意到

$$p^{\ln n}=\exp(\ln p\cdot\ln n)=n^{\ln p}, \tag{39}$$

因此

$$\frac{1}{p^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln p}}, \tag{40}$$

故$p>\mathrm{e}$时级数收敛，$0<p\leq\mathrm{e}$时级数发散。 □

题 2. 设参数p和q都是正实数，判断正项级数收敛性
1.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^p}{n^q}$。
2.$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^q(\ln n)^p}$。
3.$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^q(\ln\ln n)^p}$。

分析：本题的三个级数都是使用比较判别法的框架判别收敛性。我们知道无穷大量$\ln n$的量级低于n，因此无穷小量$\frac{(\ln n)^p}{n^q}$的量级应当接近$\frac{1}{n^q}$，把握此思路，我们可以以$q=1$作为分界线研究级数的收敛性。

Proof. **1.**首先考虑$q\leq 1$的情形，我们以q级数进行比较$\frac{(\ln n)^p}{n^q}>\frac{1}{n^q}$。由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}$发散，因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^p}{n^q}$发散。

其次考虑$q>1$的情形，由于不能直接以q级数作为比较级数，因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}$收敛推不出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^p}{n^q}$收敛。我们取一个$1<r<q$，以$r$级数为比较级数

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(\ln n)^p}{n^q}}{\frac{1}{n^r}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^p}{n^{q-r}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n^{\frac{q-r}{p}}}\right)^p=0. \tag{41}$$

上述极限成立是因为对数项的量级比较低，其中$\frac{q-r}{p}>0$。

综上，当$0<q\leq 1$时级数发散，当$q>1$时级数收敛，级数收敛性与参数p无关。

2.首先考虑$q>1$的情形，此时我们可以直接使用q级数进行比较$\frac{1}{n^q(\ln n)^p}\leq\frac{1}{n^q}$，由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}$收敛推出$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^q(\ln n)^p}$收敛。

其次考虑$q<1$的情形。由于不能直接以q级数作为比较级数，因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}$发散推不出$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^q(\ln n)^p}$收敛。我们以1级数作为比较级数

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^q(\ln n)^p}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-q}}{(\ln n)^p}=+\infty. \tag{42}$$

由于1级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，因此$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^p}{n^q}$发散。

最后考虑临界情况$q=1$，此时上述方法皆不适用，我们采用积分判别法，序列的单调性是容易验证的。考虑积分极限

$$\int_2^X \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} = \begin{cases} \left.\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\right|_2^X = \frac{(\ln X)^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1, \\ \ln\ln x|_2^X = \ln\ln X - \ln\ln 2, & p = 1. \end{cases} \tag{43}$$

结合积分判别法，当$0 < p \leq 1$时极限$\lim_{X\to+\infty}\int_2^X \frac{dx}{x(\ln x)^p} = +\infty$发散，因此级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$发散；当$p > 1$时级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$收敛。

综上，当$0 < q < 1$或$q = 1$且$0 < p \leq 1$时级数发散，当$q > 1$或$q = 1$且$p > 1$时级数收敛。

3.使用与第二问类似的方法，就可以验证$q < 1$时级数发散，$q > 1$时级数收敛。$q = 1$时虽然无法直接使用积分判别法，因为不定积分$\int_2^X \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln\ln x)^p}$不可计算，我们需要额外选择别的方法处理$q = 1$情形。

由于$\ln\ln n$是比$\ln n$量级还小的无穷大量，我们选择发散级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$作为比较级数，那么可以断言对于任意$p$ $\frac{1}{n\ln n}$都是比$\frac{1}{n(\ln\ln n)^p}$更高阶的无穷小量：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{n(\ln\ln n)^p}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\ln\ln n)^p}{\ln n} = \lim_{y\to+\infty}\frac{(\ln y)^p}{y} = 0, \tag{44}$$

其中第三个等式是极限的换元，令$y = \ln n$。因而对任意$p > 0$级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln\ln n)^p}$都是发散的。

综上，当$0 < q \leq 1$时级数发散，当$q > 1$时级数收敛，级数收敛性与参数p无关。 □

题 3. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是一个正项级数，其部分和序列$S_n = \sum_{k=1}^{n}a_k$，证明下述命题：
1.如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，那么正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$也发散。
2.不论$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是否收敛，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$总收敛。

分析：本题是抽象级数的证明题，整体思路是采用比较判别法或柯西准则，对正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$放缩。为了使证明思路更自然，我们代入发散级数$a_n = 1$尝试得到$\frac{a_n}{S_n} = \frac{1}{n}$，换言之，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散使得$a_n$在部分和$S_n$的占比很大，因而$\frac{a_n}{S_n}$很大，我们可以以此尝试对$\frac{a_n}{S_n}$向下放缩。

Proof. **1.**我们首先考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$连续若干项的和，由于正项级数部分和序列$S_n$单调递增得到

$$\sum_{k=n+1}^{m}\frac{a_k}{S_k} \geq \frac{\sum_{k=n+1}^{m}a_k}{S_m} = \frac{S_m - S_n}{S_m}, \tag{45}$$

正项级数发散保证$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$，固定$n$考虑$m \to \infty$有$\lim_{n\to\infty} \frac{S_m - S_n}{S_m} = 1$。结合不等关系

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{S_k} = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k} \right) \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{46}$$

现在我们用反证法，假如正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$收敛。现在我们在柯西准则中取$\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在$N \in \mathbb{N}^*$使得对一切$m > n > N$有

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k} < \frac{1}{2}. \tag{47}$$

在此固定n考虑$m \to \infty$有

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k} \right) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n > N. \tag{48}$$

结合式(46)对一切$n \in \mathbb{N}$成立，式(46)和式(48)产生矛盾。由此正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$发散。

2.考虑到$S_n^2 \geq S_n S_{n-1}$，因此对$n \geq 2$有

$$\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}, \tag{49}$$

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$的部分和序列满足

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_n} < \frac{1}{S_1}, \tag{50}$$

即部分和序列有界，因此正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$收敛。

我们指出，用与第二问相同的方法，可以证明正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$对一切$p > 1$收敛。读者可以自行补充证明。 □

题 4. 任取发散的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，回答下列问题：
1.证明正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$总收敛。
2.证明正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$总发散。
3.通过选取不同的$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，说明正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n a_n}$可能发散也可能收敛。

分析：本题第一问的收敛性是不难证明的。第二问的过程中，我们通过尝试代入不同的$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$会发现，我们会发现正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$的不同“机理”：如果$a_n$比较小（例如$a_n$有界），那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$可以被$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$控制，如果$a_n$过大，那么$\frac{a_n}{1+a_n}$也会过大。遵循这种规律，我们可以分$a_n$是否有界来证明正项级数的发散性。第三个级数，取$a_n = 1$很难找到发散的级数，收敛级数的构造比较困难。

Proof. **1.**利用比较判别法

$$\frac{a_n}{1+n^2 a_n} < \frac{a_n}{n^2 a_n} = \frac{1}{n^2}, \tag{51}$$

根据$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛得到级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$是收敛级数。

2.根据此前分析，我们分两种情况讨论：若a_n为有界序列，不妨$a_n<M$，用比较判别法有

$$\frac{a_n}{1+a_n}>\frac{a_n}{1+M} \tag{52}$$

根据级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散得到级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$是发散级数。

若a_n是无界序列，则我们可以选取$\{a_n\}$的一个子列a_{n_k}使得$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=+\infty$。选取方法是：首先取$a_{n_1}=a_1$；对任意$k\in\mathbb{N}^*$，$a_{n_k}$都不是序列的最大者，因此可以新的$a_{n_{k+1}}>a_{n_k}+1$，由此得到的子列满足$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=+\infty$。进一步得到$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}}=1$。根据序列子列极限的性质，得到$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$一定不是0，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$发散。

3.考虑$a_n=1$，那么$\frac{a_n}{1+na_n}=\frac{1}{1+n}$，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$是发散级数。

收敛的情形不容易想到。考虑

$$a_n=\begin{cases}1 & ,n=k^2,k\in\mathbb{N}^*\\ 0 & ,\text{其他项},\end{cases} \tag{53}$$

此时

$$\frac{a_n}{1+na_n}=\begin{cases}\frac{1}{1+n} & ,n=k^2,k\in\mathbb{N}^*\\ 0 & ,\text{其他项},\end{cases} \tag{54}$$

那么$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}$，根据比较判别法得到这是一个收敛级数。本题说明正项级数的发散性和收敛性本身具有迷惑性，结构是充分复杂的。 □

题 5. 判断一般项级数收敛性$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$。

分析：虽然$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}=0$但是$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right\}$本身不单调递减，所以不能根据Leibniz判别法判别$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$是收敛还是发散（使用Dirichlet-Abel判别法也不行）。

Proof. 首先，通过比较判别法，不难发现$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$不绝对收敛。

下面讨论收敛性。形式上看，序列$v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$和$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$是比较接近的，考虑到有Leibniz公式可得$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，我们考虑$v_n$与$u_n$的差：

$$u_n-v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}, \tag{55}$$

我们记$w_n=\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}$，此时$\sum_{n=2}^{\infty}w_n$为正项级数，并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}}{\frac{1}{n}}=1, \tag{56}$$

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$发散。

根据关系$v_n = u_n - w_n$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛而级数$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$发散，因此$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散。 □

题 6. 判断级数收敛性$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$，其中$[\cdot]$是取整函数。

分析：本题作为非交错级数的一般项级数，难以使用Dirichlet-Abel判别法。本题级数的结构为减1项-加3项-减5项以此类推，加和减的项数也不一致，但是我们可以将同号的项凑在一起，对这些同号项的和为一项分析。

Proof. 首先，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$显然不绝对收敛。

下面讨论收敛性。将级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$的连续同号项合并，并考虑一个新交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$，其中

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2-1}, \tag{57}$$

我们希望利用Leibniz判别法，判别交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$的收敛性，从而得到题目中的级数收敛的结论。那么我们就需要序列a_n的单调性和极限性质。

我们对求和a_n放缩得到

$$\frac{2n+1}{n^2} > a_n > \frac{2n+1}{(n+1)^2}, \tag{58}$$

因此有$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。但是这不足推出$a_n$单调递减，我们需要更精细的估计。我们将$a_n$拆分为前$n$项和后$n+1$项：

$$\begin{cases} b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+n-1}, \\ c_n = \frac{1}{n^2+n} + \frac{1}{n^2+n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+2n}, \end{cases} \tag{59}$$

对b_n和c_n分别放缩

$$\frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} > b_n > \frac{n}{n^2+n-1} > \frac{1}{n+1}, \tag{60}$$

和

$$\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n^2+n} > c_n > \frac{n+1}{n^2+2n} > \frac{1}{n+1}, \tag{61}$$

因此

$$\frac{2}{n+1} < a_n = b_n + c_n < \frac{2}{n}, \tag{62}$$

这说明a_n单调递减。结合Leibniz公式知交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛.

综上，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$条件收敛。

我们补充，将一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$同号项合并形成交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$的过程虽然直观但是不够严格。严格说明清楚需要考虑部分和序列$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k}$。将同号的若干项放在一起，因此对于$n^2\le m\le(n+1)^2$，部分和$S_m$的值介于$S_{n^2}$与$S_{(n+1)^2}$之间。而交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$的收敛意味着$\lim_{n\to\infty}S_{n^2}$收敛，由夹逼原理得到$\lim_{m\to\infty}S_m$也收敛，即一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$收敛。 □

题 7. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$收敛。

分析：本题是使用重排定理解答的证明题，对于正项级数来说收敛等价于绝对收敛，所以收敛的正项级数都可以重排。我们对级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$根据分母$a_n$的大小从小到大排（对$\frac{1}{a_n}$来说是从大到小排），由此来简化级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$收敛的证明。

Proof. 我们分两步来证明。

步骤1. 假定序列$\{a_n\}$是单调递增的序列，且级数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛，我们证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$收敛。根据序列的非负性和递增性有

$$\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}\le\frac{2n}{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}\le\frac{2n}{na_n}\le\frac{2}{a_n}. \tag{63}$$

同理放缩

$$\frac{2n-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}}\le\frac{2n-1}{a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1}}\le\frac{2n-1}{na_n}\le\frac{2}{a_n}. \tag{64}$$

因此对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$的相邻的第$2n-1$项和第$2n$项有如下放缩

$$\frac{2n-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}}+\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}\le\frac{4}{a_n}. \tag{65}$$

根据比较定理，由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛可以推出级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$收敛。

步骤2. 如果序列$\{a_n\}$并非单调递增，我们将$\{a_n\}$重新排列为单调递增的序列$\{b_n\}$。这里有一个问题：单调递增的重排是否可以完成？例如序列$x_n=\frac{1}{n}$，我们无法找到$\{x_n\}$中最小的元素，所以无法从小到大为$\{x_n\}$重排。对于题目中的序列$\{a_n\}$，这种重排是否可以完成呢？

为了说明重排$\{a_n\}$的可行性，我们利用级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛性导出的部分和有界性：即存在上界$M>0$使得

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\le M,\quad\forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{66}$$

现在对于任意$\varepsilon>0$，我们说明序列$\{a_n\}$中值比ε小的项个数有限：如果某个$a_k<\varepsilon$，蕴含$\frac{1}{a_k}>\frac{1}{\varepsilon}$，根据式(66)部分和有界，满足$\frac{1}{a_k}>\frac{1}{\varepsilon}$的项$a_k$只有有限个，所以值比$\varepsilon$小的项个数有限。由于我们总能为数目有限的项从小到大排序，所以我们可以将序列$\{a_n\}$重排为单调递增的序列$\{b_n\}$。

注意到级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$是收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$的重排级数，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$也收敛，根据之前的分析，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$也收敛。由于$\{b_n\}$是从小到大的重排，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}. \tag{67}$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$收敛。 □

2.2 精选补充题

补 1. 设参数p为正实数，判断正项级数收敛性$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\ln\frac{n+1}{n-1}$。

补 2. 判断正项级数收敛性$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$。（提示：使用*Cauchy*判别法，得到的极限借助泰勒公式计算）

补 3. 判断一般项级数收敛性$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin n}{n}$。

补 4. 设$\{a_n\}$是单调递增的有界序列，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$是收敛的。

补 5. 在讲义的例*4*中，请举例说明，如果$l=1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$可能发散也可能收敛。

补 6. 我们知道*1*级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，现在我们在*1*级数的基础上，去掉所有分母包含*9*的项，例如$\frac{1}{9},\frac{1}{19},\frac{1}{91}$等，得到一个新级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$，证明这个新级数收敛。