北京大学高等数学B习题课讲义：微分中值定理

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后修改：2022.11

1 知识点理解

之前我们只学习了导数的计算，接下来的几节我们将研究导数的诸多应用。我们从微分中值定理开始介绍，微分中值定理的形式很明确，是其他导数的应用如洛必达法则和泰勒公式的基础。例如高中数学的经典性质，导数和单调性的对应关系就是微分中值定理的基本推论。理解微分中值定理，除了理解定理的基本形式，还要了解微分中值定理的几何意义，以及定理在解题中的应用。

1.1 三类中值定理

三类中值定理指；罗尔中值定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理，读者需要熟悉三个定理的叙述和内涵。其中罗尔定理和拉格朗日定理的证明对于解题有很强的指导意义，需要读者熟练掌握。

罗尔中值定理

在介绍罗尔定理之前，我们首先介绍一个简单的结论：费马定理。费马定理叙述了高中数学的一个基本结论：极值点处的导函数值为零：

定理 1.1 (Fermat). 如果$f(x)$在点$x=a$的邻域$(a-r,a+r)$定义，且在$x=a$处可导。如果对一切$y\in(a-r,a+r)$都有$f(y)\geq f(a)$或$f(y)\leq f(a)$（分别对应点$x=a$是极小值和极大值），那么$f'(a)=0$。

其证明只依赖导数的定义：

Proof. 反证法，我们只考虑对一切$y\in(a-r,a+r)$都有$f(y)\geq f(a)$的情况。那么对一

切$y \in (a-r,a)$有$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leq 0$；另一方面，对一切$y \in (a,a+r)$有$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geq 0$。根据极限的不等性质：

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-0} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leq 0, \quad f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geq 0. \tag{1}$$

由于$f(x)$在$x=a$处可导，那么$f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a)$，由此$f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a) = 0$。 □

罗尔定理的叙述是

定理 1.2 (Rolle)**.** 如果$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，在开区间(a,b)可导，并且假定f在区间两个边界函数值相等即$f(a) = f(b)$，我们可以找到开区间(a,b)上的点ξ满足$f'(\xi) = 0$。

罗尔定理的叙述很抽象，但是其几何意义很明显。例如图1图像代表的函数在区间端点a,b具有相同的函数值，即图像的端点$(a,f(a))$和$(b,f(b))$具有相同的水平高度。假设有一个手持手电筒的小人，由点$(a,f(a))$出发，沿着f的图像走向点$(b,f(b)$，在行走的过程中手电筒的光柱一直朝着图像的切线方向。那么总有一刻手电筒光柱的方向是水平向x轴正方向的。亦即存在一点$\xi \in (a,b)$，$x=\xi$处切线方向水平，即$f'(\xi) = 0$

特别提示，与定积分中值定理不同，罗尔定理找到导数函数值为0的点$x=\xi$是位于开区间(a,b)的，不会位于边界$x=a$或$x=b$上。此外，根据罗尔定理只能证明满足$f'(\xi)=0$的点在(a,b)中存在，通常无法判断其具体位置，也无法统计满足$f'(\xi)=0$的点究竟有几个。

罗尔定理的证明并不难：由于费马定理，$f(x)$在的极大值点一定是导数为0的点，我们只要说明极值点ξ不在闭区间$[a,b]$的端点上即可。（注：极大值和最大值是不同的概念，我们会在后续学习区分，这里不做声明）

Proof. 由于$f(x) \in C[a,b]$，根据闭区间连续函数的极值定理，$f(x)$在闭区间$[a,b]$的最大值M和最小值m都可以取到，即存在$\xi \in [a,b]$和$\eta \in [a,b]$使得$f(\xi) = M$和$f(\eta) = m$。

只要ξ,η之一不位于闭区间$[a,b]$的端点，那么$f'(x)$在该点取值就是0。我们考虑ξ,η都位于闭区间$[a,b]$的端点的情况，由于$f(a) = f(b)$，这说明$M = m$，因此f是常值函数，罗尔定理依然正确。 □

拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理的叙述是

定理 1.3 (Lagrange)**.** 如果$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，在开区间(a,b)可导，我们可以找到开区间(a,b)上的点ξ满足$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

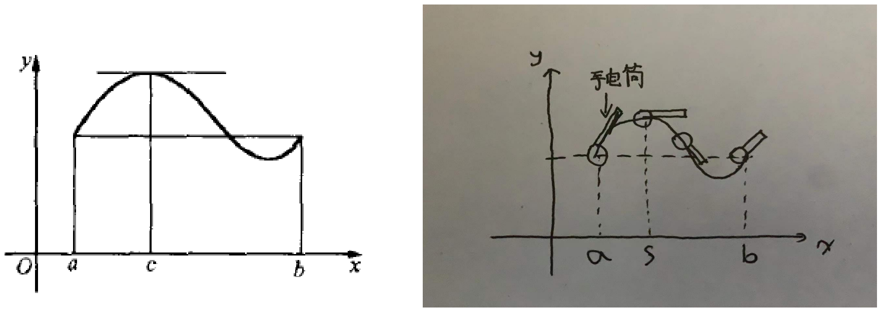

图 1: 罗尔中值定理的几何性质示意图。

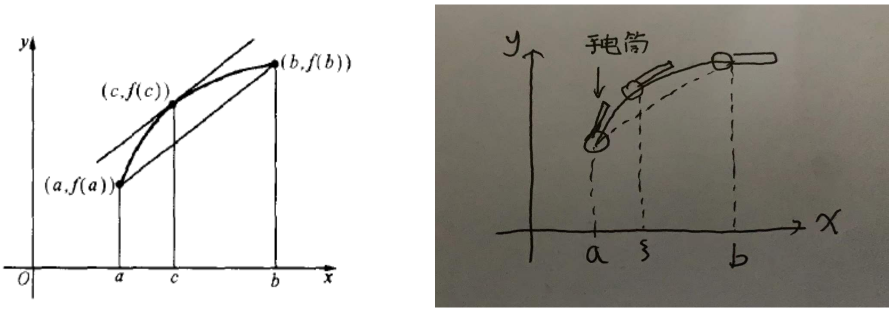

图 2: Lagrange中值定理的几何性质示意图。

拉格朗日定理比起罗尔定理，不再需要$f(b) = f(a)$的条件，但是有类似的几何意义：同样有一个手持手电筒的小人沿着图2所示的图像，由点$(a, f(a))$出发走向点$(b, f(b))$，在行走的过程中，总有一刻手电筒光柱的方向平行于连接点$(a, f(a))$和$(b, f(b))$的直线。由于连接点$(a, f(a))$和$(b, f(b))$的直线斜率是$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，因此存在$\xi \in (a, b)$使得$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。对比图1和图2，如果我们将图2的坐标轴$XoY$旋转到与连接点$(a, f(a))$和$(b, f(b))$的直线平行，那么两个中值定理是等价的。

拉格朗日中值定理的证明需要在罗尔定理基础上构造辅助函数，我们后续展开。

最后，拉格朗日定理最直接的应用是不定积分的唯一性定理：即给定函数$f(x)$，其原函数直接只差一个常数：

定理 1.4. 如果$f(x)$在开区间(a, b)可导，并且$f'(x) = 0$在开区间(a, b)成立，那么$f(x)$在开区间(a, b)恒为常值。

柯西中值定理

柯西中值定理较少使用，主要应用是证明洛必达法则，其叙述是

定理 1.5 (Cauchy)**.** 设两个函数$f(x), g(x)$在闭区间$[a, b]$连续，在开区间(a, b)可导，且$g'(x)$在(a, b)非零，我们可以找到开区间(a, b)上的点ξ满足$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

柯西中值定理的证明也是构造辅助函数使用罗尔定理，然而辅助函数的构造比较复

杂，不做要求掌握。

1.2 中值定理在解题中的应用

本节主要介绍中值定理的各种直接应用。和单调性相关的方法我们将在后续学习函数性质章节时总结。

常函数的证明

定理1.5告诉我们，想要证明一个函数$f(x)$在某闭区间$[a,b]$是常值函数，只需证明导数$f'(x)$在(a,b)上恒为零即可。

例 1. 设$f(x)$和$g(x)$都在(a,b)可导，其中$g(x)\neq 0$和$f(x)g'(x)=f'(x)g(x)$对一切$x\in(a,b)$成立，求证：存在$k\in\mathbb{R}$使得$f(x)=kg(x)$对一切$x\in(a,b)$成立。

Proof. 本题的结论是希望我们证明函数$T(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$是一个常值函数，由此计算导数

$$T'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0,\quad \forall x\in(a,b). \tag{2}$$

所以$T(x)$在(a,b)上是常值函数。 □

分析方程的零点

根据罗尔定理，如果函数$f(x)$满足$f(a)=f(b)$，那么$f'(x)$至少在(a,b)上有一个零点。该定理常常以推论形式出现：如果$f(x)$在定义域存在两个不同的零点ξ,η，那么$f'(x)$也存在至少一个零点，因为$f(\xi)=f(\eta)=0$。

例 2. 任取实数c_1,c_2，证明方程$c_1\cos x+c_2\cos 2x=0$在$(0,\pi)$有零点。

Proof. 设$f(x)=c_1\cos x+c_2\cos 2x$。由于罗尔定理可以说明导函数存在零点，那么我们就将$f(x)$写成原函数的导函数应用罗尔定理。考虑$F(x)=c_1\sin x+\frac{c_2}{2}\sin 2x$，那么$F(0)=F(\pi)=0$，由于$f(x)=F'(x)$，所以存在$\xi\in(0,\pi)$使得$f(x)=F'(x)=0$。 □

例 3. 求证：方程$2^x+2x^2+x-1=0$至多只有两个根。

Proof. 定义$f(x)=2^x+2x^2+x-1$。我们用反证法，假设f存在至少三个零点$a<b<c$，那么罗尔定理告诉我们存在$\xi\in(a,b)$和$\mu\in(b,c)$是函数f'的零点，其中

$$f'(x)=2^x\ln 2+4x+1. \tag{3}$$

即$f'(\xi)=f'(\mu)=0$。再用罗尔定理，存在点$\lambda\in(\xi,\mu)$是f''的零点，其中

$$f''(x)=2^x(\ln 2)^2+4. \tag{4}$$

另一方面，由于$2^x>0$，所以$f''(x)>0$对任意实数x成立。由此f''不存在零点。这与我们由罗尔定理推出的结论矛盾。所以方程$2^x+2x^2+x-1=0$至多只有两个零点。 □

计算极限

拉格朗日中值定理的形式为$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。在一些极限中，如果函数具有$f(b)-f(a)$的形式，其中f特别复杂，可以将函数值差写成拉格朗日定理的形式。

例 4. 计算极限$\lim_{n\to\infty} n\left[\arctan\left(\ln(n+1)\right)-\arctan\left(\ln(n)\right)\right]$。

Proof. 由于函数$f(x)=\arctan x$是可导的函数，根据Lagrange中值定理，存在点$\xi_n\in(\ln(n),\ln(n+1))$满足

$$\arctan\left(\ln(n+1)\right)-\arctan\left(\ln(n)\right)=\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{1+\xi_n^2}. \tag{5}$$

特别注意参数ξ_n是依赖n的，虽然我们不知道ξ_n具体值，但是我知道他的范围是$\xi_n\in(\ln(n),\ln(n+1))$。代入化简计算

$$n\left[\arctan\left(\ln(n+1)\right)-\arctan\left(\ln(n)\right)\right]=\frac{1}{1+\xi_n^2}\cdot\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right). \tag{6}$$

注意到$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$，另一方面$\xi_n\in(\ln(n),\ln(n+1))$，所以$\lim_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$，因此

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\arctan\left(\ln(n+1)\right)-\arctan\left(\ln(n)\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n^2}\cdot\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=0. \tag{7}$$

□

不等式的证明

与拉格朗日定理在极限的应用类似，当我们想证明的不等式具有函数值差的形式，我们也可以通过拉格朗日中值定理变形化简要证明的不等式。最常见的例子是高中数学的经典不等式$\ln(1+x)\leq x$，我们可以用中值定理的语言轻易证明：设$f(x)=\ln(1+x)$，那么$f(x)-f(0)=\ln(1+x)$，所以对于$x>0$有

$$\ln(1+x)=f(x)-f(0)=xf'(\xi)=\frac{x}{1+\xi}>x, \tag{8}$$

其中$\xi\in(0,x)$是正数。对$x<0$情况同理。所以。使用中值定理证明不等式的核心是选择合适的函数，并将不等式写成函数值之差的形式。

例 5. 设$0 < a < b$，证明不等式$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b) \le (1+a+b)\ln(1+a+b)$。

Proof. 构造函数$f(x) = (1+x)\ln(1+x)$，那么我们要证明的不等式相当于

$$f(a) + f(b) \le f(a+b). \tag{9}$$

用拉格朗日定理，存在$\xi \in (b, a+b)$使得

$$f(a+b) - f(b) = af'(\xi) = a(1+\ln(1+\xi)). \tag{10}$$

由于$\xi > b > a$，所以

$$a(1+\ln(1+\xi)) > a + a\ln(1+a) \ge \ln(1+a) + a\ln(1+a) = f(a), \tag{11}$$

其中第二个不等号是应用了$a \ge \ln(1+a)$的结论。

特别声明，本题如果对$f(a+b) - f(a)$使用拉格朗日定理将无法得到结论，同学们在解题时应多加尝试。 □

1.3 存在性问题和辅助函数的构造

我们常常遇到这样的习题，给定在区间(a, b)可导函数$f(x)$，我们希望证明存在$\xi \in (a, b)$使得函数值$f(\xi)$和导函数函数值$f'(\xi)$满足一定的性质。这类存在性问题通常使用罗尔定理来解决，将需要构造的式子写成某个函数的导函数。然而这一过程常常依赖辅助函数的构造。我们首先来看通过罗尔定理证明拉格朗日定理的方法

Proof. 我们想证明存在$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，我们转而构造另外的函数

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a). \tag{12}$$

我们称$F(x)$为辅助函数。其显然具有下述性质：
1.$F(a) = F(b) = f(a)$。
2.$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。
我们对函数$F(x)$应用罗尔定理，存在点$\xi \in (a, b)$使得$F'(\xi) = 0$，即有

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0. \tag{13}$$

□

我们简单总结一下构造辅助函数F的思路：我们需要找到一个$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，也可以看作方程$g(y) = f(y) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$的零点。利用罗尔定理寻找方程的零点，我们需要将方程涉及的函数$g(y)$写成某函数的导函数，所以我们希望构造$g(y)$的原函

数为$G(y)=f(y)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(y-C)$，其中$C$是待定常数。为了使用罗尔定理，还必须$G(a)=G(b)$，所以我们取$C=a$，$G$就变成了题目中的辅助函数$F$。也就是说，用罗尔定理处理这类存在性问题时，可以模仿例题2的思路，将需要构造的ξ看成寻找某个方程的零点，通过构造原函数的方式利用罗尔定理解决。

然而大多数时候，想要辅助函数F同时满足$F(a)=F(b)$且具有指定的导函数性质是非常苛刻的。因此通常需要对目标的存在性算式进行代数变形，同时辅助函数本身也会比较巧妙（例如柯西定理的辅助函数）。在高等数学的范畴里，我们不要求掌握过分复杂的辅助函数构造。

例 6. 设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上二阶可导，并且$g'(x)\neq 0$对一切$x\in(a,b)$成立，求证：存在$\xi\in\mathbb{R}$使得$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

分析：本题在形式上与柯西定理接近，但是我们选用罗尔定理构造辅助函数的方法解决。由于分式的形式难以构造辅助函数，我们首先对目标式代数变形。

Proof. 我们对目标式代数变形

$$f(a)g'(\xi)+g(b)f'(\xi)=f(\xi)g'(\xi)+f'(\xi)g(\xi). \tag{14}$$

设$h(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)-f(a)g'(x)-g(b)f'(x)$，我们相当于证明$f(x)=0$在$(a,b)$上存在根。自然可以考虑$h(x)$原函数得

$$H(x)=f(x)g(x)-f(a)g(x)-f(x)g(b). \tag{15}$$

那么$H'(x)=h(x)$且$H(a)=H(b)=-f(a)g(b)$，用罗尔定理知存在ξ使得$H'(\xi)=h(\xi)=9$。 □

1.4 *补充内容：达布中值定理

达布定理是刻画导函数性质的定理，它告诉我们存在原函数的函数必须满足一定的要求，换言之不是任意函数都可以成为某函数的导函数的。简单来说，就是任意导函数必须具有类似连续函数的介值性。达布中值定理的严格叙述是：

定理 1.6 (Darboux)**.** 设$f(x)$在$[a,b]$可导，如果实数η介于$f'(a)$与$f'(b)$之间，即$f'(a)<\eta<f'(b)$或$f'(b)<\eta<f'(a)$成立，那么存在$c\in(a,b)$使得$f'(c)=\eta$。

达布定理虽然不依赖积分中值定理证明，但是其证明思路和罗尔中值定理非常类似，这是需要同学们掌握的地方，即融会贯通费马定理和罗尔中值定理的证明思路。

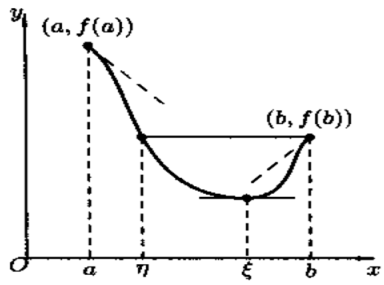

图 3: Darboux定理的证明示意图

Proof. 我们先证明$\eta = 0$的简单的情况，不妨设$f'(a) < 0 < f'(b)$，我们证明存在$c \in (a, b)$使得$f'(c) = 0$。根据导数的定义

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} < 0, \tag{16}$$

$$f'(b) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(b) - f(b - \Delta x)}{\Delta x} > 0. \tag{17}$$

由于式(16)极限为负，根据函数极限的有界性，存在$\delta > 0$，使得$\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta} < 0$，因此$f(a + \delta) < f(a)$。同理，根据极限(17)为正，也存在$\gamma > 0$使得$f(b - \gamma) < f(b)$。由此可见函数$f$在$[a, b]$上的的最小值必然在开区间$(a, b)$取到（如图所示）。设极小值点为$c$，根据费马定理$f'(c) = 0$。

对于更一般的$\eta \neq 0$的，对$F(x) = f(x) - \eta x$应用$\eta = 0$的达布定理。不妨$f'(a) < \eta < f'(b)$，那么$F'(a) < 0 < F'(b)$，所以存在$c \in (a, b)$使得$F'(c) = f'(c) - \eta = 0$。

□

2 扩展延伸

2.1 扩展题概览

扩展延伸题部分难度较大，建议根据题目内容选择性阅读。

- 扩展习题1：中等难度，利用罗尔定理分析零点。
- 扩展习题2：中等难度，罗尔定理的推论。
- 扩展习题3：困难难度，构造辅助函数证明存在性问题。
- 扩展习题4：困难难度，构造辅助函数证明存在性问题。
- 扩展补充题1：简单难度，拉格朗日定理的直接应用。

- 扩展补充题2：中等难度，利用罗尔定理和广义罗尔定理分析零点，类比扩展习题1。

- 扩展补充题3：中等难度，达布定理的推论。

- 扩展补充题4：困难难度，构造辅助函数证明存在性问题。

2.2 扩展习题

题 1. 定义函数$F(x)=(x-a)^n(x-b)^n$，其中$n\in\mathbb{N}^*$，实数$a<b$，定义$f(x)=F^{(n)}(x)$，证明$f(x)$在(a,b)中至少存在n个互不相同的根。

分析：本题是使用罗尔定理分析零点的类型，旨在通过罗尔定理找到$f(x)$在(a,b)中至少存在n个不同零点。

Proof. $n=1$的情形是显然的，我们不妨考虑$n\geq 2$。首先$F(x)$具有零点a,b，使用罗尔定理$F'(x)$存在零点$\xi\in(a,b)$。到这里看似无法使用Rolle定理继续确定F''的零点了，但是我没注意到

$$F'(x)=(n-1)(x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}(2x-a-b), \tag{18}$$

使用a,b也是F'的零点。于是我们找到了F'的三个不同的零点a,ξ,b。继续推导出F''在(a,b)上至少存在两个零点。一般地，只要$k<n$，根据Leibniz公式有

$$F^{(k)}(x)=\sum_{j=0}^{k}\left[(x-a)^n\right]^{(j)}\left[(x-b)^n\right]^{(k-j)}. \tag{19}$$

注意到$[(x-a)^n]^{(j)}$和$[(x-b)^n]^{(k-j)}$依然是关于$x-a$和$x-b$的多项式。使用对于F的小于n次的任意阶导数，a,b依然是零点。我们仿照上述方法，F'存在包括a,b的三个零点，于是F''存在包括a,b的四个零点，以此类推，$F^{(n-1)}$存在包括a,b的$n+1$个零点。注意到由于a,b不再是$F^{(n)}$的零点，我们用Rolle定理可以推出$F^{(n)}$存在至少n个零点。 □

题 2. 设$f(x)$在$\mathbb{R}$可导，如果极限$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$，求证：存在$\xi\in\mathbb{R}$使得$f'(\xi)=0$。

分析：如果将无穷远点的极限看作f在$\pm\infty$的函数值，本题也可以看成无穷区间$[-\infty,+\infty]$的罗尔定理，因此本题的结论也称为**广义罗尔定理**。

Proof. **方法1.** 利用罗尔定理证明，即如果找到实数$a<b$满足$f(a)=f(b)$，就存在$\xi\in(a,b)$满足$f'(\xi)=0$，存在a和b的方法是连续函数的介值定理，不过需要将无穷区间截断为有界闭区间才可以使用介值定理。

首先，任取$\gamma \in (a,b)$满足$f(\gamma) \neq l$，不妨$f(\gamma) > l$。（注意：如果这样的γ取不到就说明f是常值函数，结论自然成立）此时利用极限$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$，存在足够小的$\alpha$使得$|f(\alpha) - l| < \frac{f(\gamma)-l}{2}$，因此$f(\alpha) < \frac{f(\gamma)+l}{2} < f(\gamma)$；同理利用极限$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$，存在足够小的$\beta$使得$|f(\beta) - l| < \frac{f(\gamma)-l}{2}$，因此$f(\beta) < \frac{f(\gamma)+l}{2} < f(\gamma)$。在区间$[\alpha, \gamma]$使用介值定理，存在$a \in (\alpha, \gamma)$使得$f(a) = \frac{f(\gamma)+l}{2}$；在区间$[\gamma, \beta]$使用介值定理，存在$b \in (\gamma, \beta)$使得$f(b) = \frac{f(\gamma)+l}{2}$。综上$f(a) = f(b) = \frac{f(\gamma)+l}{2}$，利用罗尔定理存在$\xi \in (a,b)$满足$f'(\xi) = 0$。

方法2. 我们同样设法将无穷区间转化到有限区间使用罗尔定理。定义函数$y = \tan x$，定义域$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，构造复合函数$g(x) = f(\tan x)$，由此$g$是在$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$定义的函数，并且根据复合函数的求导性质$g(x)$在$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$可导。

由于极限$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = l$，因此

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} g(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} f(\tan x) = \lim_{y\to-\infty} f(y) = l, \tag{20}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} g(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(\tan x) = \lim_{y\to+\infty} f(y) = l. \tag{21}$$

我们在定义域为$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$的函数$g(x)$基础上，补充定义开区间边界的函数值得到新的函数

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} l & ,x = \pm\frac{\pi}{2}, \\ g(x) & ,x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{cases} \tag{22}$$

由于$\tilde{g}$在$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$连续，在$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$可导，且$g(\frac{\pi}{2}) = g(-\frac{\pi}{2}) = l$，所以存在$c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$满足

$$\tilde{g}'(c) = \frac{f'(\tan c)}{\cos^2 c} = 0 \tag{23}$$

取$\xi = \tan c$，由此$f'(\xi) = 0$。 □

题 3. 设函数$f(x)$在$[a,b]$一阶可导，在(a,b)二阶可导，满足$f(a) = f(b) = 0$和$f'(a)f'(b) > 0$，求证：

1. 存在$c \in (a,b)$使得$f(c) = 0$。

2. 存在$d \in (a,b)$使得$f'(d) = f''(d)$。

3. 存在$e \in (a,b)$使得$f''(e) = f(e)$。

分析：本题的第一问做法和达布定理的证明比较类似，第二问和第三问则是需要构造函数的存在性问题。

Proof. **1.**由$f'(a)f'(b) > 0$，不妨设$f'(a), f'(b) > 0$，根据导数的定义有

$$f'(a) = \lim_{\delta\to0+0} \frac{f(a+\delta) - f(a)}{\delta} > 0, \tag{24}$$

$$f'(b) = \lim_{\delta\to0+0} \frac{f(b) - f(b-\delta)}{\delta} > 0. \tag{25}$$

由于式(24)极限为正，根据函数极限的有界性，存在$\alpha > 0$使得$\frac{f(a+\alpha)-f(a)}{\delta} > 0$，因此$f(a+\alpha) > f(a) = 0$。同理根据极限(25)，也存在$\beta > 0$使得$f(b-\beta) < f(b) = 0$。由此我们找到了$a < a+\alpha < b-\beta < b$满足$f(a+\alpha) > 0 > f(b-\beta)$。根据$f$的连续性，存在$c \in (a+\alpha, b-\beta) \subset (a,b)$使得$f(c) = 0$。

2.我们想要构造辅助函数F，使得我们可以得到形如$f'(x) = f''(x)$的式子。构造

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x} f'(x). \tag{26}$$

求导得

$$F'(x) = \mathrm{e}^{x}(-f'(x) + f''(x)). \tag{27}$$

于是我们想证明存在$f'(d) = f''(d)$，就只需要证明$F'(d) = 0$。这就是辅助函数F构造的妙处。

我们希望对F用Rolle定理。首先，函数f存在三个零点$a < c < b$，根据Rolle定理，存在点$\xi \in (a,c)$和$\mu \in (c,b)$是f'的零点，即$f'(\xi) = f'(\mu) = 0$。于是ξ和μ也是F的零点，即$F(\xi) = F(\mu) = 0$，再由Rolle定理，存在$d \in (\xi, \mu)$使得$F'(d) = 0$，此时$f(d) = f''(d)$。

3.我们这次希望构造辅助函数G，使得我们可以得到形如$f(x) = f''(x)$的形式。构造

$$G(x) = \mathrm{e}^{-x}(f(x) + f'(x)). \tag{28}$$

那么得到

$$G'(x) = \mathrm{e}^{-x}(f'(x) + f''(x) - f(x) - f'(x)) = \mathrm{e}^{-x}(f''(x) - f(x)). \tag{29}$$

由此我们只要得到$G'(e) = 0$就可以证明$f(e) = f''(e)$。

为了研究G'零点的存在性，我们首先需要讨论G的零点。由此我们先构造函数

$$H(x) = \mathrm{e}^{x} f(x). \tag{30}$$

根据条件，H有三个零点$a < c < b$。考虑导函数

$$H'(x) = \mathrm{e}^{x}(f(x) + f'(x)). \tag{31}$$

因此H'有两个零点$p \in (a,c)$和$q \in (c,b)$。于是

$$f(p) + f'(p) = f(q) + f'(q) = 0 \tag{32}$$

由此可得p和q也是函数G的零点，所以存在$e \in (p,q)$使得$G'(e) = 0$，即$f(e) = f''(e)$。

$\square$

题 4. 设$f \in D^2[a,b]$且$f(a)=f(b)=0$，证明：对于任意$x\in(a,b)$，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$。

Proof. 由于x,a,b都是确定的数，我们的目标是找到一个$\xi\in(a,b)$使得使得

$$f''(\xi)=\lambda=\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}. \tag{33}$$

令$g(y)=f''(y)=\lambda$，我们想将g写成某函数的原函数。由此取

$$G(y)=f(y)-\frac{\lambda}{2}(y-a)(y-b)=f(y)-f(x)\frac{(y-a)(y-b)}{(x-a)(x-b)}. \tag{34}$$

那么显然有$G''(y)=g(y)$和$G(a)=G(b)=G(x)=0$。所以存在$p\in(a,x)$和$q\in(x,b)$使得$G'(p)=G'(q)$，然后存在$\xi\in(p,q)$满足$g(\xi)=0$。 □

2.3 扩展补充题

补 1. ***2021高数B期末考试题.*** 证明：存在定义域是是全体实数且取值于$(0,1)$的函数$\theta(x)$使得$\arctan x=\frac{x}{1+(x\theta(x))^2}$对一切$x$成立。

补 2. 设n是任意自然数，讨论下述函数的零点数

1.勒让德多项式 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n)}$在$(-1,1)$有$n$个不同零点。

2.拉盖尔多项式 $L_n(x)=\mathrm{e}^x\left[x^n\mathrm{e}^{-x}\right]^{(n)}$.在$\mathbb{R}$有$n$个不同零点。

补 3. 设$f(x)\in D^1(a,b)$，使用达布定理证明：如果$f'(x)$存在间断点，那么间断点必须是第二类间断点。

补 4. 证明下列问题

1.f在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可导，$f(1)=0$，求证：存在$\xi\in(0,1)$使得 $f'(\xi)=\left(1-\xi^{-1}\right)f(\xi)$。

2.f在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，求证对于任意实数λ，均存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$。