幂级数

谢彦桐
北京大学数学科学学院

May 24, 2022

1 知识内容理解

在前一章我们曾经提到，通过函数项级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，我们可以研究复杂且没有表达式的极限函数$S(x)$的有关性质，而一致收敛性成为传递性质的中心枢纽。在实际应用中，用以表达$S(x)$的函数序列$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$一般选取得尽量简单，本节则将$u_n(x)$取定为多项式形式，得到的函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$称为幂级数。幂级数的好处在于，它在收敛域上具有良好的一致收敛性，使得我们常常可以不验证一致收敛性就可以传递函数性质。

为了方便起见，未加说明的话，我们只考虑以0为中心的幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，其中系数$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为给定实数。一般的幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$可以通过换元$y=x-x_0$转化为以0为中心的幂级数。

1.1 幂级数的逐点收敛和收敛半径

给定定义在$[a,b]$函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，定义**收敛域**$D\subset[a,b]$是指使得数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)$收敛的所有$t\in[a,b]$构成的集合。收敛域$D$也是极限函数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的定义域。

幂级数的收敛域是非常特殊的，体现在如下两点

1.收敛域的形式和收敛半径 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域为以0为对称的一个区间，根据区间的开闭性，收敛域的形式有四种：$[-R,R],[-R,R),(-R,R],(-R,R)$。其中非负实数$R$（可以取$+\infty$）被称为**收敛半径**，刻画了幂级数收敛域的大小，但是幂级数在点$\pm R$是否收敛是不确定的，为了方便起见我们称开区间$(-R,R)$为**收敛区间**，收敛区间不一定与收敛域相同。

2.收敛区间上的绝对收敛性 虽然幂级数在收敛域和收敛区间逐点收敛，更进一步我们

还可以证明幂级数在收敛区间$(-R,R)$上绝对收敛。如果收敛域包含点R或$-R$，幂级数在该点可能绝对收敛也可能条件收敛。由此，除了收敛区间的边界$\pm R$，幂级数的逐点收敛性只有两种可能，绝对收敛或发散，不存在条件收敛的可能。

直观理解上述事实，当点t的绝对值$|t|$逐渐增大时，幂级数在点$x=t$对应的数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$每一项的绝对值$|a_n t^n|$也增大。根据我们对正项级数收敛性的理解，当$|t|$越大数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$就越不容易收敛，因此幂级数的收敛域被框定在以0为中心以收敛半径为宽度的一个区间内。严格的数学事实表述为如下定理：

定理 1. 给定幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，存在被称为收敛半径非负实数$R$（可以取$+\infty$）使得
*1.*幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛区间$(-R,R)$逐点绝对收敛。
*2.*幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(R,+\infty)\cup(-\infty,R)$逐点发散。
*3.*幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在点$\pm R$的收敛性是不确定的，存在发散 、绝对收敛和条件收敛三种可能，因此幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛域有四种可能：$[-R,R],[-R,R),(-R,R],(-R,R)$。

在上一章中，对一般函数项级数求收敛域并不容易，对于幂级数而言，我们则有通过幂级数的系数直接计算收敛半径R的公式，得出收敛半径后我们只需验证幂级数在点$\pm R$的单点收敛性，就可以计算出幂级数的收敛域。下面我们整理幂级数收敛半径的计算公式：
1.基于D'Alembert判别法的公式 如果极限$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$收敛且值为$l$（$l$可以是$+\infty$），那么幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R=l^{-1}$。
2.基于Cauchy判别法的公式 如果极限$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$收敛且值为$l$（$l$可以是$+\infty$），那么幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R=l^{-1}$。

直接套用D'Alembert判别法或Cauchy判别法验证幂级数的逐点绝对收敛性，不难得到上述公式。与D'Alembert判别法或Cauchy判别法类似，上述公式有一定局限性，主要体现在如果极限$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$或极限$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$发散，就不能通过公式计算收敛半径。这时需要我们通过特定技巧，绕过收敛半径的公式直接计算收敛半径。

下面我们通过几个例题来看收敛半径和收敛域的常见解题技巧：

例 1. 计算下列幂级数的收敛域和收敛半径：
1.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^2}(x-3)^n$；
2.$\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^{3n}$；
3.$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n}+\frac{5^n}{n^2}\right)x^n$；

分析：本题包含了求幂级数收敛半径和收敛域计算的各种题型和技巧，第一问选用比值判别法并涉及了幂级数中心非0的情况，第二问选用根式判别并涉及到幂级数部分项系数为0导致公式失效的情况，第三问则应用了分项计算收敛半径的特殊技巧。

Proof. **1.**使用基于D'Alembert判别法的公式计算幂级数收敛半径

$$\frac{1}{r}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n+2)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln(n+1)}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}=1, \tag{1}$$

因此收敛半径$R=1$。考虑到幂级数以3为中心，收敛区间为$(2,4)$，由此我们还需补充验证$x-3\pm 1$时幂级数的单点收敛性。

当$x-3=1$时，考虑数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^2}$，取比较级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，注意到极限关系式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n+1)}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^{\frac{1}{2}}}=0, \tag{2}$$

并结合$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$的收敛性，可知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^2}$收敛；当$x-3=-1$是数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n^2}$由绝对收敛性可判定收敛；因此幂级数收敛域$[2,4]$。

2.根据题意将幂级数写成$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$形式，得出系数

$$a_n=\begin{cases}5^{\frac{n}{3}} & ,n\text{是3的倍数},\\ 0 & ,n\text{不是3的倍数}.\end{cases} \tag{3}$$

根据公式计算

$$\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}\sqrt[3]{5} & ,n\text{是3的倍数},\\ 0 & ,n\text{不是3的倍数},\end{cases} \tag{4}$$

所以极限$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$发散，收敛半径的计算公式失效。为了解决这一问题，我们给出两种替代做法。

方法1.直接使用Cauchy判别法

固定$x\in\mathbb{R}$，设$u_n=5^nx^{3n}$，我们直接使用Cauchy判别法判别数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$的收敛性。首先考虑绝对收敛性，通过Cauchy判别法判别绝对值正项级数$\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$的收敛性，计算下述极限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=5x^3, \tag{5}$$

因此当$|x|<\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$时数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$绝对收敛，本题幂级数对$|x|<\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$收敛；另一方面，当$|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$时绝对值级数$\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$不收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$不绝对收敛，考虑到对于除收敛半径边界$\pm R$以外的点幂级数都不可能条件收敛，所以当$|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$时数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$发散。由此可得收敛半径为$R=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$。

我们还需要验证幂级数在点$\pm\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$的单点收敛性，代入$x=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$得到$u_n=1$，代入$x=-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$得到$u_n=(-1)^n$，都说明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。结合上述分析，本题幂级数的收敛域是$(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}},\frac{1}{\sqrt[3]{5}})$。

方法2.通过换元法转化为没有0系数项的幂级数以使用收敛半径公式

做换元$y=x^3$，得到新的幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}5^nx^{3n}=\sum_{n=1}^{\infty}5^ny^n. \tag{6}$$

直接套用基于Cauchy判别法的公式的收敛半径公式可得幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}5^ny^n$的收敛半径是$\frac{1}{5}$，收敛域是$(-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$。考虑到换元关系$y=x^3$，题目中的幂级数的收敛域是$(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}},\frac{1}{\sqrt[3]{5}})$，收敛半径是$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$。

3.本题幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n}+\frac{5^n}{n^2}\right)x^n$可以拆分为两个幂级数$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n$和$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$两个幂级数分别讨论。用公式可以计算幂级数$S_1(x)$的收敛半径是$\frac{1}{3}$，收敛域是$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$；同样可得幂级数$S_2(x)$的收敛半径是$\frac{1}{5}$，收敛域是$[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}]$。

考虑到幂级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n}+\frac{5^n}{n^2}\right)x^n$可以写为$S_1(x)$和$S_2(x)$两个幂级数的和，因此当$x\in[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}]$时两个级数均收敛，所以幂级数$S(x)$收敛；当$x\in[-\frac{1}{5},-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},\frac{1}{5})$时，$S_1(x)$收敛而$S_2(x)$发散，此时$S(x)$发散。再结合幂级数的性质得到$S(x)$的收敛半径是$\frac{1}{5}$，收敛域是$[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}]$。

□

1.2 幂级数的性质

幂级数的性质可以分为两类，一类是幂级数的四则运算和收敛半径相关的性质，另一类是收敛区间上逐点收敛推出一致收敛的性质。通过一致收敛的性质，我们可以将幂级数的连续性等性质传递给极限函数。

幂级数的四则运算性质

在上一例题的第三小问中，我们曾将幂级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n}+\frac{5^n}{n^2}\right)x^n$分拆为两个幂级数$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n$和$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$的和，对于每一个给定的$x$而言，$S(x)$相当于数项级数$S_1(x)$和$S_2(x)$的和，因此我们可以通过$S_1(x)$和$S_2(x)$的单点收敛性确定$S(x)$的单点收敛性。

利用上述方法，我们可以定义任意两个幂级数的加和、乘积等运算，并通过子幂级数的收敛信息得出新幂级数的收敛信息。考虑两个幂级数$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$和$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径分别是$R_a$和$R_b$，我们可以直接定义和幂级数和差幂级数为各项系数加减得到的幂级数

$$\left(S_1\pm S_2\right)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)x^n. \tag{7}$$

得到的新幂级数$(S_1 \pm S_2)(x)$的收敛半径是$\min\{R_a, R_b\}$，是通过收敛区间的性质得到的；给定实数$c \in \mathbb{R}$，可以定义幂级数的数乘

$$(cS_1)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n. \tag{8}$$

得到的新幂级数$(cS_1)(x)$的收敛半径不变，仍为R_a；此外幂级数还可以定义乘法，乘法的定义相当于幂级数部分和相乘的极限

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) =& a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \cdots \\ &+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\end{aligned} \tag{9}$$

其中$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$。实际上，我们可以证明，如果对于给定的$x$幂级数对应的数项级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$都绝对收敛，那么乘积级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$也绝对收敛，由此可得乘积级数的收敛半径大于$\min\{R_a, R_b\}$，但是这一部分的证明超出课程要求。

幂级数的一致收敛性质

我们指出，幂级数的招牌性质就是收敛区间上的一致收敛性，通过这一性质我们可以论证极限函数的可积性和可微性。假定幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$，收敛区间为$(-R, R)$，收敛域虽然未知，但是必然是以0为中心$2R$为长度的区间。通常来说，幂级数在收敛域上不具有一致收敛性，但是幂级数在收敛区间具有**内闭一致收敛**性质：即对于任意的闭区间$I \subset (-R, R)$，幂级数都在闭区间I上一致收敛。可以看到，在收敛区间$(-R, R)$上内闭一致收敛是比一致收敛更弱的结论，即便如此，这也足够推导幂级数的逐项积分和逐项求导性质。

我们总结为如下定理

定理 2. ***Abel*定理.** 给定幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R > 0$，那么
*1.*幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛半径$(-R, R)$上内闭一致收敛，但是通常不一致收敛。
*2.*如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在点$x = R$单点收敛，那么幂级数在$[b, R]$一致收敛，其中$b \in (-R, R)$；这说明幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在区间$(-R, R]$内闭一致收敛。
*3.*如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在点$x = -R$单点收敛，那么幂级数在$[-R, c]$一致收敛，其中$c \in (-R, R)$；这说明幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在区间$[-R, R)$内闭一致收敛。
*4.*结合结论*2*和结论*3*，如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在点$x = \pm R$两点均收敛，那么幂级数在$[-RR]$一致收敛。

Abel定理是用函数项级数的Abel判别法证明的。Abel判别法除了告诉我们幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛区间$(-R, R)$的内闭一致收敛外，还给出了将收敛区间的内闭一致

收敛加强为一致收敛的方法：如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在点$x=R$单点收敛，那么一致收敛性可以延伸到包含点$R$的区间$[b,R]$上。对于一般的幂级数，在点$x=\pm R$两点的收敛性并不容易研究，所以幂级数在收敛半径的内闭一致收敛是足够推导丰富的性质的。

最后，我们来谈一谈为什么内闭一致收敛就足以完成幂级数性质的传递。考虑幂级数极限函数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，显然每一个函数$a_n x^n$都是连续的函数。我们想了解$S(x)$在收敛区间$(-R,R)$的连续性，最理想的情况是幂级数在$(-R,R)$一致收敛。如果一致收敛得不到，我们也可以通过幂级数在闭区间$[-M,M]$一致收敛（这是内闭一致收敛可以保证的），其中$M\in(0,R)$任意，并由此得到极限函数$S(x)$在闭区间$[-M,M]$连续。考虑到连续性是逐点定义的结论，$S(x)$要在$(-R,R)$连续需要$S(x)$对任意$t\in(-R,R)$单点连续，而对于任意$t\in(-R,R)$，我们都可以找到一个闭区间$[-M_0,M_0]$使得$t\in[-M_0,M_0]$，从而$S(x)$在点$x=t$单点连续。根据连续性的定义，$S(x)$在收敛区间$(-R,R)$连续。所以仅需内闭一致收敛就可以得出收敛区间内的连续性，类似地也可以得出可积性和可微性等结论。上述说明，内闭一致收敛足以完成极限函数在收敛半径$(-R,R)$内性质分析的工作。

1.3 幂级数的逐项积分和逐项求导

这一节旨在说明，即便不去验证幂级数的一致收敛性，我们也可以自由地使用逐项积分和逐项求导的方法研究幂级数的极限函数，逐项积分和逐项求导是幂级数最为特色的方法。

逐项积分

假定幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$，在收敛区间$(-R,R)$内闭一致收敛。任取$y\in(-R,R)$，由于每一项$a_n x^n$在闭区间$[0,y]$可积，且幂级数在$[0,y]$一致收敛，可以得到逐项积分定理

$$T(y)=\int_0^y S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^y a_n x^n \mathrm{d}x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}y^{n+1}. \tag{10}$$

更换自变量y的名字为x，得到一个新的逐项积分幂级数

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}. \tag{11}$$

这里需要指出几点注意事项

1.由于变限积分的形式，$T(x)$实际是原极限函数$S(x)$的不定积分，幂级数项$\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$可以理解为$a_n x^n$的不定积分，因此式(11)可以直观看作对幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$做不定积分。即便如此，由于一致收敛性只能传递定积分的值，所谓“逐项不定积分”实际是通过在不同的区间$[0,y]$做定积分推导的，因此在写解题过程时务必指明。

2.值得一提的是，逐项积分定理还保证了新积分幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径与原幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$相同，也是$R$。
3.即便幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径也是$R$，新幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$和原幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在边界点$\pm R$的单点收敛性也不一定一致。

接下来给出逐项积分定理的一个简单应用

例 2. ***2021春季高数期末考试题***. 求幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$的极限函数$S(x)$的显式表达式。

分析：题目给出的幂级数是无法直接计算极限函数的，但是等比级数的极限函数是可以计算的，所以我们应设法通过积分的方法将题目中的幂级数向等比级数靠拢。

Proof. 首先写出幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$的收敛半径和收敛域。幂级数的收敛半径为1，收敛域为$(-1,1)$。

对$S(x)$逐项在闭区间$[0,y]$积分，其中$|y|<1$

$$\int_0^y S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^y(n+1)x^n\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}y^{n+1}. \tag{12}$$

积分得到的幂级数是等比级数，所以$\int_0^y S(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{1-y}$，再对$y$求导$S(y)=\frac{y}{(1-y)^2}$。 □

逐项求导

假定幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$，在收敛区间$(-R,R)$内闭一致收敛。为了达成逐项求导，我们实际需要导函数幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$的一致收敛性。通过强级数判别法，我们可以证明导函数幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$在$(-R,R)$内闭一致收敛（作为推论可得其收敛半径也为$R$），所以极限函数$S(x)$在收敛区间上可导，并且有逐项求导定理：

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}. \tag{13}$$

这里需要指出几点注意事项
1.逐项求导定理还保证了导函数幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$的收敛半径与原幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$相同，也是$R$。
2.即便幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$的收敛半径也是$R$，新幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$和原幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在边界点$\pm R$的单点收敛性也不一定一致。
3.导函数幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$在$(-R,R)$内闭一致收敛的强级数判别法证明是值得作为习题练习的。

例 3. 求幂级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的极限函数$S(x)$的显式表达式。

Proof. 首先写出幂级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的收敛半径和收敛域。幂级数的收敛半径为1，收敛域为$[-1,1)$。

对$S(x)$逐项求导得到等比级数

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}, \tag{14}$$

结合$S(0)=0$有

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=-\ln(1-x), \quad \forall x\in(-1,1). \tag{15}$$

值得一提的是，虽然本题中原幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$和导函数幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$的收敛半径都是1，但是前者在$x=-1$单点收敛，后者在$x=-1$则不收敛。

我们这里注意一个重要细节：由于导函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$的收敛域不包含边界点-1，所以我们通过式(15)实际不能直接算出$S(-1)$的值，因此$S(-1)$需要补充计算。如果代入幂级数的话得到

$$S(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2, \tag{16}$$

然而交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$的直接计算方法超出了课本的要求；另一种计算方法是，由于幂级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$在点$x=-1$收敛，根据Abel定理幂级数在闭区间$[-1,0]$一致收敛，根据连续性的传递，极限函数$S(x)$在点$x=-1$是连续的。而式(15)告诉我们$S(x)=-\ln(1-x)$在$x\in(-1,1)$成立，根据连续性有

$$S(-1)=\lim_{x\to-1+0}-\ln(1-x)=-\ln 2. \tag{17}$$

所以$S(x)=-\ln(1-x)$在$x\in[-1,1)$成立。从这一角度我们可以看到，通过幂级数逐项求导计算$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的极限函数，实际使得我们可以计算一个看起来并不好算的数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，这也是逐项积分和逐项求导的价值所在。 □

逐项积分和逐项求导的解题技巧解析

我们总结此前两例的共同思路，都是通过将待求级数通过逐项积分和逐项求导的方法，转变为可以计算极限函数的等比级数，最后在对新的极限函数进行求导或积分得出原本的极限函数。从形式上看，级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$通过逐项求积分（形式上可以看作逐项不定积分）得到等比级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$通过逐项求导得到等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$。因此判断使用逐项积分还是逐项求导，要从待求幂级数的形式上出发。而此前两例，可以作为选择逐项积分还是逐项求导处理问题的模板。

此外逐项积分法和逐项求导法通常只能算出极限函数在收敛区间上的取值，对于收敛区间的边界上的点，需要我们通过连续性单独去分析（由于这一分析难度偏大，部分

习题只要求计算极限函数在收敛区间的值），详见例题3。利用这种分析方式，使得我们可以通过幂级数逐项积分和逐项求导法去计算复杂数项级数的值，在后续例题和习题中会有类似的问题。

接下来，我们介绍两个综合题，从中解析这类问题的一些高端技巧

例 4. 求幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$的极限函数$S(x)$的显式表达式。

分析：从形式上看，本题使用逐项积分的方法会比较简单。然而我们如果不加处理对$\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$逐项积分，会得到非常复杂的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}x^n$，分母项$n+1$消不掉。注意到前例中幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$用逐项积分可以直接得到等比级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$，我们尝试将本题幂级数拆成一些可以逐项积分处理的幂级数。

Proof. 首先写出幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$的收敛半径为1，收敛域为$(-1,1)$。

为了用逐项积分的方法计算这一幂级数，我们首先对n^2x^n进行拆分，得到$n^2x^n=(n+1)(n+2)x^n-3(n+1)x^n+x^n$，然后对三项分别计算幂级数。

首先考虑幂级数

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n, \tag{18}$$

在$[0,y]$对自变量x进行逐项定积分，其中$|y|<1$

$$T_1(y)=\int_0^y S_1(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)y^{n+1}, \tag{19}$$

继续在$[0,z]$对自变量y进行逐项定积分，其中$|z|<1$

$$\int_0^z T_1(y)\mathrm{d}y=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+2}=\frac{z^2}{1-z}, \tag{20}$$

然后对极限函数进行求导

$$T_1(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^2}{1-z}\right)\bigg|_{z=y}=-1+\frac{1}{(1-y)^2}, \tag{21}$$

继续求导一次

$$S_1(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-1+\frac{1}{(1-y)^2}\right)\bigg|_{y=x}=-\frac{2}{(x-1)^3}. \tag{22}$$

另一方面我们此前已经得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2},\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}. \tag{23}$$

结合上述计算结果

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1). \end{aligned} \tag{24}$$

□

例 5. 求幂级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的极限函数$S(x)$的显式表达式，并借此计算数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$。

分析：对级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$进行逐项求导可以消去分母的$n$得到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}$，然而再对新级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}$求导也无法消去分母的项$n+1$。然而结合前例，我们可以处理级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$的计算，而它与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}$差了一个$x^2$。这说明，除了直接对幂级数反复求导或积分外，适当的乘项也可以提供新的计算方式。

Proof. 首先写出幂级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径为$1$，收敛域为$[-1,1]$。

首先对幂级数逐项求导得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}. \tag{25}$$

然后在上式左右同乘项x^2得

$$x^2S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{26}$$

结合前例$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$，我们有

$$x^2S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x)-x. \tag{27}$$

由此可得

$$S'(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x^2}-\frac{1}{x}. \tag{28}$$

然后结合$S(0)=0$可得

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\left(\frac{(1-t)\ln(1-t)}{t}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}=\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}-(-1). \tag{29}$$

因此$S(x)=1+\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$在收敛区间$x\in(-1,1)$上成立。注意这里使用了极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}=-1. \tag{30}$$

因此分式$\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$在$x=0$处取值为-1。

接下来计算$S(x)$在两个边界点$x=\pm 1$的取值。先考虑$x=1$，用裂项法可以计算数项级数

$$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1. \tag{31}$$

再考虑$x=-1$，这次的级数无法直接通过裂项法计算，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$在$x=-1$收敛，使用幂级数在闭区间$[-1,0]$一致收敛，结合连续性的传递极限函数$S(x)$在闭区间$[-1,0]$连续，所以

$$S(-1)=\lim_{x\to-1+0}\left(1+\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}\right)=1-2\ln 2. \tag{32}$$

结合对各段分析，我们可以总结$S(x)$的表达式

$$S(x)=\begin{cases}1+\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} & ,x\in[-1,1)/\{0\},\\ 0 & ,x=0,\\ 1 & ,x=1.\end{cases} \tag{33}$$

实际我们也不难验证$S(x)$在闭区间$[-1,1]$连续。

另一方面，我们将$x=-1$代入幂级数，可以得到数项级数

$$S(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}=1-2\ln 2. \tag{34}$$

这个交错级数的值如果不通过幂级数方法是极难计算的。 □

1.4 Taylor级数

之前我们曾研究了幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的性质，这一节我们反过来：给定一个在区间$(x_0-R,x_0+R)$定义的函数$f(x)$，我们能不能将$f(x)$写成一个以$x_0$为中心的幂级数？亦即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad \forall x\in(x_0-R,x_0+R), \tag{35}$$

其中系数a_n是待定的，而定义域(x_0-R,x_0+R)自然成为幂级数的收敛区间。如果可以将函数$f(x)$写成幂级数，我们可以利用逐项积分和逐项求导这两个属于幂级数的强大工具研究问题。事与愿违，并不是每一个函数$f(x)$都可以写成幂级数，而我们本节就要研究什么样的函数$f(x)$可以写成幂级数的形式。为了方便起见，我们假定幂级数中心$x_0=0$，函数$f(x)$是在以0为中心的开区间$(-R,R)$定义的函数，收敛半径默认$R\in(0,+\infty]$。

可以写出幂级数的函数的条件

我们不选择通过复杂的理论介绍可以写出幂级数的函数所具有的条件，而是从两种直观的角度理解这一理论。

假定函数$f(x)$是某幂级数的极限函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad x\in(-R,R),\tag{36}$$

其中幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径是$R$。根据此前关于逐项求导的分析，极限函数$f(x)$在收敛半径必须可导，并且有收敛区间的逐项求导关系式

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad x\in(-R,R).\tag{37}$$

由于求导后幂级数收敛半径不变，我们还可以得出极限函数的导函数$f'(x)$必须可导的结论，并继续将二阶导$f''(x)$写出幂级数的形式。以此类推，如果$f(x)$是某幂级数的极限函数，那么$f(x)$必须无穷次可导。无穷次可导并不是一个过于苛刻的条件，我们熟悉的大部分函数如多项式 、幂指对数函数和三角函数都是无穷次可导的。

另一方面，我们给出一个在$(-R,R)$无穷次可导的函数$f(x)$，我们想找到一系列幂级数系数a_n使得式(36)成立，即将$f(x)$写成多项式函数的极限，用多项式近似给定函数。从目的的角度，上述行为与我们此前学过的Taylor展开（或称Taylor公式）是非常类似的，对于给定$f(x)$，我们有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\left(x^n\right),\quad x\to 0.\tag{38}$$

也就是$f(x)$与多项式$f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$就差一个小量。

我们现在回到寻找(36)的过程中。在式(36)代入$x=0$直接得$a_0=f(0)$，在导函数关系式(37)代入$x=0$则得到$a_1=f'(0)$，以此类推得到$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$。我们发现如果我们希望式(36)成立，系数实际必须是f的各阶导数要与Taylor展开中多项式的各个系数吻合，与$f(x)$高阶导数在$x=0$处函数值相关，亦即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad x\in(-R,R),\tag{39}$$

我们惊讶地发现，寻找$f(x)$的幂级数表示和寻找$f(x)$的Taylor展开的过程上有诸多吻合，所以我们称将$f(x)$写成的式(36)或式(39)右侧的幂级数为**Taylor级数**，以0为中心的Taylor级数被称为**Maclaurin级数**。在此，我们便可以严格地给出给定函数$f(x)$表示为Taylor级数的定义，便是式(39)在收敛区间$(-R,R)$成立，其中收敛半径R是由Taylor级数的各项系数（即f的各阶导数）决定的。在一些文献中，能写成Taylor级数的函数被称为**实解析函数**。

我们曾经说过，如果一个函数$f(x)$可以表示Taylor级数，那么$f(x)$必须在收敛半径$(-R,R)$无穷次可导。那么无穷次可导的函数$f(x)$就一定可以写成Taylor级数吗，答案却是否定的。比较令人失望的是，我们并不能简单从无穷次可导$f(x)$的表层性质就判断出$f(x)$是不是可以写出Taylor级数。虽然如此，我们依然可以从Taylor展开的余项的角度写出关于$f(x)$是不是实解析函数的不太表象的判别法：定义Taylor展开的余项

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \tag{40}$$

如果$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$对一切$x\in(-R,R)$成立，那么$f(x)$就可以写成Taylor级数的形式，即式(39)成立。

常见函数的Taylor级数

虽然我们花了很长的篇幅讨论什么样的函数可以写成Taylor级数的形式，我们常用的各种函数都是可以写成Taylor级数的。对于常见的函数，Taylor级数的形式与Taylor展开非常类似，但是二者最大的不同是：Taylor展开是将给定函数写成Taylor多项式加一个小量，因此Taylor展开实际上是一种极限行为；Taylor级数是将给定函数写成幂级数极限函数的等式，在收敛域上均成立，并非是极限行为。因此通常来说，Taylor级数可以覆盖Taylor公式的用途。

在课本上，我们通过证明了常见的函数的Taylor展开余项为0，来说明这些函数可以写成Taylor级数的形式。下面我们简要总结常见函数的Maclaurin级数。在记忆这些Maclaurin级数展开式时，也需要熟悉这些级数的收敛半径和收敛域，只有在收敛域上我们才能保证幂级数等于给定函数的函数值（注：默认$0!=1$）：

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty),\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty),\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty),\\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots,\ x\in[-1,1],\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\ x\in(-1,1],\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-1,1).
\end{aligned}$$

我们在每一个Maclaurin级数后面标注了其收敛域和收敛半径。对于Maclaurin级数的收敛域，我们有几点说明

1.并不是每一个函数在其整个定义域上都可以写成幂级数。例如反正切函数$\arctan x$定义域为$\mathbb{R}$，但是幂级数展开$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$的收敛半径是1，收敛域是$[-1,1]$，因此$\arctan x$仅在$[-1,1]$上可以写成Maclaurin级数的形式。
2.Maclaurin级数在收敛区间边界的单点收敛性不确定。例如$\arctan x$对应的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$在收敛区间边界$x=\pm 1$都收敛，但是$\ln(1+x)$对应的幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$在收敛区间边界$x=-1$收敛在$x=1$发散。
3.在$(1+x)^\alpha$的Maclaurin级数中，如果α是正整数，那么幂级数退化为多项式，相当于多项式$(1+x)^\alpha$的二项式展开；比较常用的情形是$\alpha=\frac{1}{2}$时$\sqrt{1+x}$的Maclaurin级数展开和$\alpha=-1$时$\frac{1}{1+x}$的Maclaurin级数展开。
4.在$(1+x)^\alpha$的Maclaurin级数中，当α取正整数以外值时，收敛半径总是1，但是Maclaurin级数在收敛区间边界$x=\pm 1$的单点收敛性对不同的α会不同。

求Taylor级数的方法

本节的最后我们来简要总结给出给定函数Taylor级数特别是Maclaurin级数的方法。对于一般的函数$f(x)$，计算高阶导数$f^{(n)}(0)$都是异常困难的。因此计算Taylor级数的方法通常都是在上一节给出的常见函数的Maclaurin级数的基础上，通过换元、拆分、四则运算、逐项求导或积分等方法求出来的。通过下面的例题，我们总结各种方法。

例 6. 将以下四个函数写成*Maclaurin*级数，并写出*Maclaurin*级数的收敛半径和收敛域
***1.*换元法.** $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$.
***2.*拆分法.** $f(x)=\frac{5x-12}{x^2+5x-6}$.
***3.*四则运算法.** $f(x)=(1+x)\mathrm{e}^{-x}$.
***4.*逐项积分/求导法.** $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

分析：本题着重介绍四种方法的使用。特别地，这四类方法与之前写出Taylor级数的四类方法完全一致。

Proof. **1.**结合Maclaurin级数展开式$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，由于展开式是等式，我们可以将$x$完全替换为$x^2$得到$\mathrm{e}^{x^2}$的Maclaurin级数展开式

$$\mathrm{e}^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}. \tag{41}$$

关于收敛半径和收敛域的运算，我们可以使用例题1中给出的方法计算。在本题中，由于$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$是对一切$x\in\mathbb{R}$成立的，将$x$替换为$x^2$，自然$\mathrm{e}^{x^2}$的Maclaurin展开式也对一切$x\in\mathbb{R}$成立的。因此Maclaurin级数收敛半径为$+\infty$，收敛域为$(-\infty,+\infty)$。

2.我们将本题中复杂的有理分式拆分

$$\frac{5x-12}{x^2+5x-6}=\frac{6}{x+6}-\frac{1}{x-1}, \tag{42}$$

根据公式分别写出$\frac{6}{x+6}$的Maclaurin级数（注：只有形如$(x+1)^\alpha$才可以用公式写Maclaurin级数）

$$\frac{6}{x+6}=\left(\frac{x}{6}+1\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{6}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^n}x^n. \tag{43}$$

和$-\frac{1}{x-1}$的Maclaurin级数

$$-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1+(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \tag{44}$$

结合得到

$$\frac{5x-12}{x^2+5x-6}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right)x^n. \tag{45}$$

接下来求Maclaurin级数的收敛半径和收敛域，级数的$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^n}x^n$部分收敛半径是6，收敛域$(-6,6)$；级数的$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$部分收敛半径是1，收敛域$(-1,1)$。根据幂级数求和收敛半径的性质，本题的Maclaurin级数收敛半径是1，收敛域$(-1,1)$。

3.根据换元法，我们可以直接写出e^{-x}的Maclaurin级数

$$\mathrm{e}^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n!}. \tag{46}$$

然后模仿多项式乘法公式计算乘积

$$(1+x)\mathrm{e}^{-x}=(1+x)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n!}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)x^n. \tag{47}$$

接下来计算收敛半径和收敛域，我们也可以用幂级数加法的视角计算收敛半径，我们采用另一种方法。根据级数的乘法性质，由于式(46)对一切$x\in\mathbb{R}$都成立，所以式(47)对一切$x\in\mathbb{R}$都成立，因此Maclaurin级数的收敛半径是$+\infty$，收敛域是$(-\infty,+\infty)$。

4.本题使用逐项积分的方法，考虑$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{48}$$

根据公式

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\\
=\;&1+\left(-\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)x^{2n}+\cdots\\
=\;&1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},
\end{aligned} \tag{49}$$

根据基于D'Alembert判别法的收敛半径公式，导函数幂级数的收敛半径是1。取$|y| < 1$然后在$[0, y]$积分

$$\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}y^{2n+1}. \tag{50}$$

接下来我们讨论Maclaurin级数的收敛域和收敛半径。由于逐项积分前幂级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$的收敛半径是1，所以本题幂级数收敛半径是1；当$|x|=1$时有

$$\left|\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\right|\le\frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}, \tag{51}$$

因此$|x|=1$时幂级数绝对收敛；综上，Maclaurin级数的收敛域是$[-1,1]$。上述放缩利用了下述不等式

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{\sqrt{1\cdot 3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3\cdot 5}}{4}\cdots\frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \tag{52}$$

□

Taylor级数的应用

将给定的函数写成Taylor级数，可以应用幂级数的逐项求导和逐项积分性质。本节主要展示Taylor级数在计算定积分和计算高阶导数的两个应用。其中高阶导数的应用在此前学习的Taylor展开中也有介绍。

例 7. 通过将被积函数写成幂级数的方法证明积分恒等式$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)^2}$，实际上我们可以用傅里叶级数法证明$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{12}$。

分析：我们将被积函数$\frac{\ln(1+x)}{x}$写成幂级数，幂级数的每一项都是多项式，可以直接计算在$[0,1]$的积分。不过运用逐项积分性质的前提，是幂级数必须在$[0,1]$一致收敛，这需要幂级数在收敛区间边界点$x=1$的收敛性。

Proof. 首先考虑幂级数展开

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}, \tag{53}$$

这一级数的收敛半径是1，收敛域是$(-1,1]$，因此幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$在闭区间$[0,1]$是一致收敛的，可以在闭区间$[0,1]$用逐项积分定理：

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)^2}. \tag{54}$$

借助后续Fourier级数理论还可以证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{12}. \tag{55}$$

□

例 8. 设函数$f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$，通过*Taylor*级数的方法求$f^{(n)}(0)$和$f^{(n)}(-\frac{1}{2})$。

分析：我们只需要写出$f(x)$在指定点的Taylor级数，就可以根据Taylor级数的系数反推出高阶导数函数值。在计算$x=-\frac{1}{2}$的高阶导数时，要计算以$-\frac{1}{2}$为中心的Taylor级数时，这需要我们先进行换元$t=x+\frac{1}{2}$然后写出关于t的Maclaurin级数。

Proof. 我们需要分别写出$f(x)$的Maclaurin级数和在$x=-\frac{1}{2}$处的Taylor级数。首先是Maclaurin级数，做代数变形

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{1-x^3}, \tag{56}$$

结合$\frac{1}{1-x}$的幂级数展开有

$$\frac{1}{1-x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}, \tag{57}$$

因此

$$\frac{1}{1+x+x^2}=(1-x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{3n}-x^{3n+1}\right). \tag{58}$$

结合Maclaurin级数的系数，当$m=3n$时有$\frac{f^{(m)}(0)}{m!}=1$，因此$f^{(m)}(0)=m!$；当$m=3n+1$时有$\frac{f^{(m)}(0)}{m!}=-1$，因此$f^{(m)}(0)=-m!$；当$m=3n+2$时有$\frac{f^{(m)}(0)}{m!}=0$，因此$f^{(m)}(0)=0$。

接着求$f(x)$在$x=-\frac{1}{2}$处的Taylor级数，为此换元$t=x+\frac{1}{2}$。进行代数变形

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\left(1+\frac{4}{3}t^2\right)^{-1}, \tag{59}$$

接着计算

$$\frac{4}{3}\left(1+\frac{4}{3}t^2\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}t^{2n}. \tag{60}$$

综上$f(x)$在$x=-\frac{1}{2}$处的Taylor级数为

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n}. \tag{61}$$

结合Maclaurin级数的系数，当$m=2n$时$\frac{f^{(m)}(-\frac{1}{2})}{m!}=(-1)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m}{2}+1}$，因此$f^{(m)}(-\frac{1}{2})=(-1)^{\frac{m}{2}}m!\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m}{2}+1}$；当$m=2n+1$时有$\frac{f^{(m)}(-\frac{1}{2})}{m!}=0$，因此$f^{(m)}(-\frac{1}{2})=0$。

□

2 经典习题

2.1 例题

题 1. 计算数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{n+1}}$。

分析：这类数项级数的计算题，首先要讲数项级数写成幂级数，再通过逐项求导或逐项积分的方法计算幂级数的显式表达式。而问题的难点在于如何找到数项级数对应的幂级数，寻找幂级数的方法是观察幂级数项中指数含有n的部分，将含有指数n的项替换为x^n。

Proof. 我们取$x=-\frac{1}{2}$，级数的每一项写成

$$\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{n+1}}=\frac{2n+1}{2}x^n\bigg|_{x=-\frac{1}{2}}. \tag{62}$$

这样我们需要计算幂级数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}x^n$的极限函数，在代入$x=-\frac{1}{2}$函数值即可。特别地，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}x^n$的收敛半径是1，收敛域$(-1,1)$。

根据此前例题的计算结果

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\\ &= \frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{2(1-x)}.\end{aligned} \tag{63}$$

代入$x=-\frac{1}{2}$有

$$\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}x^n\bigg|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9}. \tag{64}$$

□

题 2. 考虑幂级数$S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$，回答下列问题：
1.求$S(x)$的收敛域和收敛半径。
2.求证：$S(x)$在收敛区间满足微分方程$(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}S(x)$。
3.求$S(x)$在收敛域显式表达式。

分析：本题为幂级数性质的综合题，可以通过关于极限函数$S(x)$的常微分方程计算$S(x)$的表达式。由于$S(x)$的逐项求导相关分析无法覆盖收敛区间边界$x=-1$的性质，在计算$S(x)$显示表达式应额外关注。

Proof. **1.**用基于D'Alembert判别法的收敛半径公式计算收敛半径

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}} = 1, \tag{65}$$

因此收敛半径是1。当$x = -1$时，数项级数$1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$是交错级数，序列$\left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right\}$单调递减，且根据式(52)有$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，因此$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0$，用Leibniz判别法知数项级数$1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$收敛。当$x = 1$时，数项级数$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$用Rabee判别法可判别发散。综上，幂级数的收敛域是$[-1, 1)$。

2.用逐项求导定理

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{n-1}, \quad \forall x \in (-1, 1), \tag{66}$$

用幂级数乘法公式

$$(1-x)S'(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1) \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} - n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right) x^n, \tag{67}$$

其中幂级数的系数满足

$$(n+1) \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} - n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{68}$$

因此得到$(1-x)S'(x) = \frac{1}{2}S(x)$对一切$x \in (-1, 1)$（收敛区间）成立。

3.在收敛区间$(-1, 1)$求解变量分离方程$(1-x)S'(x) = \frac{1}{2}S(x)$，初值$S(0) = 1$得到

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad \forall x \in (-1, 1). \tag{69}$$

我们注意到幂级数$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$在$x = -1$收敛，因此幂级数在区间$[-1, 0]$是一致收敛的，根据连续性的传递定理可以证明极限函数$S(x)$在点$x = -1$也是连续的，因此

$$S(-1) = \lim_{x\to -1+0} S(x) = \left.\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right|_{x=-1}, \tag{70}$$

因此$S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$对$x \in [-1, 1)$成立。 □

题 3. 考虑幂级数$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$，显然$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$的收敛域是$[-1, 1]$，证明对于一切$x \in (0, 1)$都有

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{71}$$

分析：这里我们采用分两步走的方法，首先证明$F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$导数为0，然后再用在边界取极限的方法证明$F(x)$恒为$\frac{\pi^2}{6}$。

Proof. 定义

$$F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x), \tag{72}$$

我们将通过幂级数展开计算$F'(x)=0$对于一切$x\in(0,1)$成立。

首先由逐项求导

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}, \quad \forall x\in(-1,1), \tag{73}$$

代入计算得

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n}-\frac{(1-x)^{n-1}}{n}\right)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}. \end{aligned} \tag{74}$$

另一方面，在$x\in(-1,1)$上用对数函数$\ln(1-x)$的Maclaurin级数

$$\frac{\ln(1-x)}{x}=\frac{1}{x}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}, \quad x\in(0,1). \tag{75}$$

同理我们可以写出在$x\in(0,1)$上，函数$\frac{\ln x}{1-x}$在点$x=1$处的Taylor级数，为此我们换元$t=x-1$有

$$\frac{\ln x}{1-x}=-\frac{\ln(1+t)}{t}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-t)^{n-1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}, \quad x\in(0,1). \tag{76}$$

将两个Taylor级数代入导数式子有$F'(x)=0$，因此对于一切$x\in(0,1)$，都有$F(x)\equiv C$，其中C为常值。

接下来旨在证明$C=\frac{\pi^2}{6}$。我们注意到幂级数$f(x)$的收敛域是$[-1,1]$，因此幂级数在$[-1,1]$闭区间一致收敛，因而$f(x)\in C[-1,1]$。同理$f(1-x)\in C[-1,1]$，因此

$$\lim_{x\to 0+0}[f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)]=f(1)+f(0). \tag{77}$$

这里极限运算

$$\lim_{x\to 0+0}\ln x\ln(1-x)=\lim_{x\to 0+0}-x\ln x=0. \tag{78}$$

由于$F(x)\equiv C$对一切$x\in(0,1)$成立，因此$C=f(0)+f(1)$，代入$f(x)$的表达式有$f(0)=0$和$f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$（需要借助傅里叶级数方法），因此命题得证。 □

题 4. 证明积分恒等式$\int_0^1 \mathrm{e}^x\ln x\mathrm{d}x=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+1)!}$。

分析：本题是利用幂级数方法计算定积分的题目。本题的难点在于，被积函数$\mathrm{e}^x\ln x$在点$x=0$处是积分瑕点，即$\lim_{x\to 0+0}\mathrm{e}^x\ln x=-\infty$，因此没有不能在$[0,1]$上将$\mathrm{e}^x\ln x$写出收敛的函数项级数的和，也就无法直接对展开的函数项级数逐项积分。为了处理$x=0$瑕点的性质，我们采用了截断的方法。

Proof. 注意到极限$\lim_{x\to 0+0}\mathrm{e}^x\ln x=-\infty$，积分$\int_0^1\mathrm{e}^x\ln x\mathrm{d}x$是以$x=0$为瑕点的瑕积分，我们也不能直接将被积函数$\mathrm{e}^x\ln x$Maclaurin级数展开。为此我们寻求用普通的函数项级数展开

$$\mathrm{e}^x\ln x=\ln x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\ln x}{n!},\quad \forall x\in(0,1]. \tag{79}$$

由于上述函数项级数等式在$x=0$处不成立，我们不能直接在闭区间$[0,1]$做逐项积分，因此我们转而在截断后的闭区间$[\delta,1]$做逐项积分，然后通过极限计算瑕积分

$$\int_0^1\mathrm{e}^x\ln x\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0+0}\int_\delta^1\mathrm{e}^x\ln x\mathrm{d}x. \tag{80}$$

因此接下来我们的目标是计算定积分$\int_\delta^1\mathrm{e}^x\ln x\mathrm{d}x$。

我们证明函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\ln x}{n!}$在$[\delta,1]$一致收敛，使用强级数判别法。我们首先得到下述放缩

$$|x^n\ln x|\le\frac{\mathrm{e}}{n},\quad \forall x\in(0,1]. \tag{81}$$

由此

$$\left|\frac{x^n\ln x}{n!}\right|\le\frac{\mathrm{e}}{n\cdot n!},\quad \forall x\in[\delta,1], \tag{82}$$

用D'Alembert判别法数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}}{n\cdot n!}$收敛，使用函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\ln x}{n!}$在$[\delta,1]$一致收敛，故有逐项积分理论

$$\int_\delta^1 e^x\ln x dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_\delta^1 x^n\ln x\mathrm{d}x\right),\quad \forall\delta\in(0,1] \tag{83}$$

定义

$$G_n(\delta)=\int_\delta^1 x^n\ln x\mathrm{d}x, \tag{84}$$

我们接下来实际要计算极限

$$\int_0^1\mathrm{e}^x\ln x\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0+0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}G_n(\delta)\right) \tag{85}$$

式(85)的右侧相当于对定义在$\delta\in[0,1]$的函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}G_n(\delta)$取极限，考虑到积分$\int_0^1 x^n\ln x\mathrm{d}x=-\frac{1}{(n+1)^2}$且点$x=0$不是瑕点，使用$G_n(\delta)$在$[0,1]$连续。另一方面，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}G_n(\delta)$一致收敛，因为

$$|G_n(\delta)|\le\left|\int_0^1 x^n\ln x\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{(n+1)^2}, \tag{86}$$

而数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$收敛，因此函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}G_n(\delta)$在闭区间$[0,1]$一致收敛，因此极限函数是连续函数，有

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{e}^x\ln x\mathrm{d}x &= \lim_{\delta\to 0+0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}G_n(\delta)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{\delta\to 0+0}G_n(\delta)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^n\ln x\mathrm{d}x=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+1)!}.\end{aligned} \tag{87}$$

$\square$

2.2 精选补充题

补 1. ***2021春季期末考试题.*** 求函数$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$的$Maclaurin$级数。

补 2. 求幂级数$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$的极限函数$S(x)$的显式表达式。

补 3. 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径是$R$，那么逐项求导幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$的在$(-R, R)$内闭一致收敛。

补 4. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径是正实数，求证：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$的收敛半径是$+\infty$。