常微分方程初等解法

谢彦桐
北京大学数学科学学院

April 12, 2022

1 知识内容理解

本讲义包含9.1和9.2两节的内容，主要介绍常微分方程的求解方法。既然是求解，因此过程并非完全的严格，重要的是把通解写出来，同学需要学习各类方程写出通解的方法，了解什么样的方程不可以求解。本课程只要求同学们会求通解，但是讲义中也列举了各例题特解的求法。

1.1 常微分方程绪论

常微分方程（简称ODE）是以**一元函数**为“未知数”的方程，形式上通常是由函数$y(x)$及其各阶导函数写成的等式，我们希望求出满足方程的一元函数的$y=y(x)$，这样的函数被称为常微分方程的**解**或**特解**。我们称常微分方程所含未知函数导数的最大次数为常微分方程的**阶数**，n阶常微分方程的一般形式是

$$F(x,y(x),y'(x)\cdots y^{(n)}(x))=0, \tag{1}$$

其中F是给定函数。

最简单的常微分方程形如$y'(x)=f(x)$，其中$f(x)$是给定函数。这一方程的解显然是不定积分$y(x)=\int f(x)\mathrm{d}x+C$，其中$C$为任意常数，换言之$C$取任何值时对应的$y(x)$都是解。类似地，常微分方程的所有解通常也如不定积分一样含有待定参数，即常微分方程的所有解实际上一类解，这样的解被称为**通解**。关于通解，我们有几点说明：

1.通解所含有的待定参数个数必须与方程阶数一致。例如n阶方程(1)的通解形如$y=y(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$。

2.通解还要求n个参数独立，定义是$\frac{\mathrm{D}(y,y',\cdots,y^{(n-1)})}{\mathrm{D}(C_1,C_2,\cdots,C_n)}\neq 0$。原则上求出通解后必须计

算Jacobi行列式计算参数独立，但是实际做题的方法通常可以保证得到得到的特解参数独立，因此实际做题时独立性验证时常省略。

3.在大多数情况下，待定参数$C_1,\cdots,C_n$各自可取任意实数，但是也有部分情况参数$C_1,\cdots,C_n$可能不能取部分值。

4.如果为待定参数$C_1,\cdots,C_n$给予特定实数值，得到的解$y=y(x)$是方程(1)的一个特解。

5.并非所有特解都能够通过在通解中代入参数值$C_1,\cdots,C_n$得到，部分方程可能出现特解无法包含在通解内的情形。然而本课程的要求是找到通解即可，这一部分特殊的特解常常不作要求。

6.由于通解常常通过对方程做不定积分得到，通解也称**通积分**。

7.考虑一阶常微分方程的通解$y=y(x,C)$，其中C是待定参数。对于每一个C画出对应特解在坐标系上的图像，可以得到平面上的一族曲线。因此常微分方程的特解也称**积分曲线**。我们知道，并非所有曲线都可以写成$y=y(x)$的形式，例如平行于y轴的直线$x=x_0$。甚至常微分方程的部分解只能写成隐函数的形式。在本节中，这类不能用$y=y(x)$表示出来的曲线也满足常微分方程，也会被归入通解或特解之列。

我们知道常微分方程的背景是物理学中的方程，在物理学中一元函数的自变量通常代表时间，用t表示。例如简谐振子在t时刻的位置用$x(t)$表示，此时可以列出关于$x(t)$的方程$x''(t)=-x(t)$。在这一场景中，人们是知道$t=0$时刻振子的信息的，所以我们实际不需要方程的通解，而是满足一定条件的特解。

正因如此，我们为n阶方程(1)给出n个**初值条件**为

$$y(x_0)=y_0,\, y'(x_0)=y_1,\cdots,\, y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}, \tag{2}$$

其中x_0和$y_0,\cdots,y_{n-1}$皆给定。求解方程(1)满足初值条件的问题被称为**常微分方程初值问题**或**常微分方程柯西问题**。显然，初值问题的解法是

1.求出(1)的特解。

2.代入初值条件求出待定参数$C_1,\cdots,C_n$的取值。

此外，在解题过程中，我们还会遇到一类形式特殊的常微分方程，形如如$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，成为**全微分方程**。其内涵等价于求解$y'(x)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$和$x'(y)=-\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$两个方程。比起单独写作$y'(x)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$形式，全微分形式的方程允许$Q(x,y)=0$的情形，因此包含更多的解。一些有意设置陷阱的题目，可能故意将常规形式的常微分方程写成全微分形式，使做题人对方程的类型误判。

1.2 各类常微分方程的解法

本节总结常微分方程的各类解法，主要分为四大系列若干小类，我们分别介绍其方法。

变量分离系列

变量分离系列方法适用于一阶方程，主要思路是将方程通过合适的换元将原方程变量分离方程。具体可以分成四种情况，每种情况我们阐明解法并给出例题。

变量分离方程

方程形式：$y'=f(x)g(y)$或$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$。

求解思路：两侧不定积分得到$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=C+\int f(x)\mathrm{d}x$。

齐次方程

方程形式：$y'=f(x,y)$，其中给定函数f为齐次函数，即可以写出形式$f(x,y)=g(\frac{y}{x})$。

求解思路：换元$u=\frac{y}{x}$，化为关于$u=u(x)$的变量分离方程$u'=\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{g(u)-u}{x}$。

备注：我们这里提到的齐次函数和齐次方程与后续学习的一阶线性齐次方程，“齐次”一词的意义完全不同，请不要混淆。

变量分离系列1

方程形式$y'=f(ax+by+c)$，其中a,b,c为常数。

求解思路：换元$z=ax+by+c$，化为关于$z=z(x)$的变量分离方程$z'=a+by'=a+bf(z)$。

变量分离系列2

方程形式：$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$，满足$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，其中$a_i,b_i,c_i$为常数$i=1,2$。

求解思路：换元$z=a_1x+b_1y$，化为关于$z=z(x)$的变量分离方程。

变量分离系列3

方程形式$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$，满足$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$，其中$a_i,b_i,c_i$为常数$i=1,2$。

求解思路：[1]求解方程组$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$的解$(x_0,y_0)$；[2]换元$u=x-x_0$和$v=y-y_0$，化为关于$u=u(v)$的齐次方程。

接下来的四个例题分别针对上面的方法，同学们需注意方法在实际解题中的注意事项。

例 1. 求解常微分方程$(x^2+1)(y^2-1)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=0$。

分析：本题类型为变量分离方程。本题本身非常简单，但是通过观察积分曲线，我们可以了解通解的几何意义。

Proof. 将去全微分方程写成变量分离的两部分

$$\frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x = -\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y. \tag{3}$$

分别计算两侧的不定积分得到

$$\int \frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln|x|, \tag{4}$$

和

$$\int -\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}y}{y-1} + \int \frac{\mathrm{d}y}{y+1}\right) = -\frac{1}{2}\ln|y^2-1|. \tag{5}$$

这里请注意函数$\frac{1}{x}$的原函数是$\ln|x|$而非$\ln x$，因为$\ln x$只在正实数有定义。类似地，函数$\frac{1}{-x}$的原函数是$-\ln|x|$而非$\ln(-x)$。由此写出变量分离方程的通积分为

$$x^2 + \ln(x^2) + \ln|y^2-1| = C, \tag{6}$$

如果对上述通积分等号两侧做e的方幂

$$\mathrm{e}^{x^2}x^2|y^2-1| = \mathrm{e}^C, \tag{7}$$

考虑到绝对值项可以展开，我们可以化简通积分

$$\mathrm{e}^{x^2}x^2(y^2-1) = C_1, \tag{8}$$

其中参数$C_1 = \pm e^C$，取正号和符号的两种情况对应绝对值的展开。注意到常数$C_1 \neq 0$，但是$C_1 = 0$时对应于解$x \equiv 0$和$y \equiv \pm 1$，也是方程的特解。将这些特解归入式(8)确定的通解中（增设$C_1 = 0$），方程有通积分

$$\mathrm{e}^{x^2}x^2(y^2-1) = C_1, \tag{9}$$

其中C_1是任意实常数。

关于本题我们有几点说明：

1.本题在变量分离方法的框架下遗漏了解$x \equiv 0$和$y \equiv \pm 1$，是因为做变量分离得式(3)过程中在等号左右两端除以了$x(y^2-1)$。

2.本题得到的解(9)就是由隐函数确定的通解，它对应于空间中的一族曲线。如图1所示，对于每个给定的C，解(9)都对应了平面上的曲线。因此常微分方程初值问题，就是找到过给定点(x_0, y_0)（对应初值条件$y(x_0) = y_0$）的积分曲线。

3.我们可以看到，图1中各条积分曲线大多都不是由$x = -\infty$延伸到$x = +\infty$的，并且都不能直接写成函数表达式的形式。研究常微分方程解的延伸性质是相当困难的，大多数情况我们只能知道方程的解在某个定义域内存在。

□

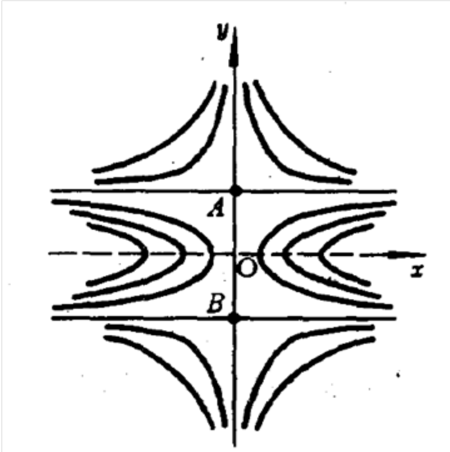

图 1: 例1方程通解的图像示意图

例 2. 求解常微分方程$y\mathrm{d}x+(2\sqrt{xy}-x)\mathrm{d}y=0$。

分析：本题形式为齐次方程，应将方程由全微分形式化为一般形式并做变量分离。

Proof. 将全微分原方程化为一般形式

$$y'=\frac{y}{x-2\sqrt{xy}}, \tag{10}$$

换元$u=\frac{y}{x}$得到

$$u'=\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{y'-u}{x}=\frac{\frac{u}{1-2\sqrt{u}}-u}{x}=\frac{\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{1-2\sqrt{u}}}{x}. \tag{11}$$

于是可以写为变量分离方程

$$\left(\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}-u^{-1}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}, \tag{12}$$

分别不定积分可得通积分

$$C-u^{-\frac{1}{2}}-\ln|u|=\ln|x|, \tag{13}$$

取e的方幂得到

$$ux\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{u}}}=C_1, \tag{14}$$

其中$C_1=\pm e^C$为任意非0实数。代入$u=\frac{y}{x}$并化简

$$y\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{x}{y}}}=C_1. \tag{15}$$

特别注意，我们并不能将$C_1=0$的情形归入(15)中。

最后考虑特解。考虑到将原方程化为齐次方程(10)时左右同除$x-2\sqrt{xy}$，我们需要补充$x-2\sqrt{xy}=0$的情况。如果$x=0$方程化为$\mathrm{d}x=0$，对应特解$x\equiv 0$；如果$\frac{x}{y}=4$，此时也有$\mathrm{d}x=0$，这种情况无法得到特解。此外得到变量分离方程(12)时假定$u\neq 0$，考虑$u=0$得到$y=0$，对应特解$y\equiv 0$。特解$x\equiv 0$和$y\equiv 0$都无法归入(15)中。 □

例 3. 求解常微分方程$y' = (8x+2y+1)^2$。

分析：本题为可化为分离变量方程的方程。

Proof. 换元$z = 8x+2y+1$，可计算微分

$$z' = 8 + 2y' = 8 + 2z^2, \tag{16}$$

化为变量分离方程形如

$$\frac{\mathrm{d}z}{8+2z^2} = \mathrm{d}x. \tag{17}$$

求解变量分离方程的通积分得到

$$\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{z}{2}\right) = x + C, \tag{18}$$

其中C为任意常数。再将z的换元代入得到原方程的通积分

$$\arctan\left(4x + y + \frac{1}{2}\right) = 4x + C. \tag{19}$$

特别地，本题没有特解。 □

例 4. 求解常微分方程$y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y-1}$。

分析：本题为线性分式方程且系数线性相关（分离变量情形2），此时使用换元$z = x+2y$即可转化变量分离方程。

Proof. 换元$z = x+2y$得到

$$z' = 1 + 2y' = 1 + \frac{2z+2}{2z-1} = \frac{4z+1}{2z-1}, \tag{20}$$

可化为变量分离方程

$$\frac{2z-1}{4z+1}\mathrm{d}z = \mathrm{d}x, \tag{21}$$

计算通积分

$$\frac{z}{2} - \frac{3}{8}\ln\left|z + \frac{1}{4}\right| = x + C, \tag{22}$$

其中C为任意常数。代入$z = x+2y$化简

$$y - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}\ln\left|x + 2y + \frac{1}{4}\right| = C. \tag{23}$$

再对两边取e的方幂

$$\mathrm{e}^{8y-4x}\left(x + 2y + \frac{1}{4}\right)^{-3} = C_1, \tag{24}$$

其中$C_1 = \pm\mathrm{e}^{8C}$为任意非0常数。这里取$C_1 = 0$无法补充特解。

下面考虑其他特解。原方程化为变量分离方程(21)时同除$4z+1$，若假设$z = -\frac{1}{4}$方程化为$\mathrm{d}z = 0$，得到特解$z \equiv -\frac{1}{4}$，即$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{8}$。 □

例 5. 求解常微分方程$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$。

分析：本题为线性分式方程且系数线性无关（分离变量情形3），此时使用换元$u = x-3$和$v = y+2$，通过关系式$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}(y+2)}{\mathrm{d}(x-3)} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$即可转化变量分离方程。

Proof. 通过解方程确定换元$u = x-3$和$v = y+2$，由$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，得到一个齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2v^2}{(u+v)^2}, \tag{25}$$

再换元$z = \frac{v}{u}$得到

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} - v}{u^2} = \frac{\frac{2z^2}{(1+z)^2} - z}{u}, \tag{26}$$

化为变量分离方程

$$-\frac{(z+1)^2}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}u}{u}, \tag{27}$$

两边分别积分，注意到$\frac{(z+1)^2}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{1+z^2}$，因此方程(27)的通积分是

$$C - 2\arctan z - \ln|z| = \ln|u|, \tag{28}$$

其中C为任意常数。再对两边取e的方幂

$$uz\mathrm{e}^{2\arctan z} = C_1, \tag{29}$$

其中$C_1 = \pm\mathrm{e}^C$为任意非0实数。代入换元$z = \frac{y+2}{x-3}$得

$$(x-3)\exp\left[2\arctan\left(\frac{y+2}{x-3}\right)\right] = C_1. \tag{30}$$

特别注意，在式(30)取$C_1 = 0$，对应特解$y \equiv -2$，可以归入通解中，因此本题通解为

$$(x-3)\exp\left[2\arctan\left(\frac{y+2}{x-3}\right)\right] = C_1, \tag{31}$$

C_1为任意实数。

□

一阶线性方程系列

一阶线性方程分为三种情况，我们分别介绍其解法。

齐次一阶线性方程

方程形式：$y' + P(x)y = 0$。

求解思路：通常肉眼观察即可得解$y = C\exp\left(-\int P(x)\mathrm{d}x\right)$。

备注：[1]书上(9.18)式给出解，形式上采用了变限定积分$\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t$替代不定积分，二者

内涵一致，因为变限定积分$\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t$也是$P(x)$一个原函数。[2]选择不同原函数差一个常数的“$+C$”蕴含在通解的系数参数里。

非齐次一阶线性方程

方程形式：$y' + P(x)y = Q(x)$。
求解思路：常数变异法，即首先求解对应的齐次方程$y' + P(x)y = 0$；然后将齐次方程的解改写为$y = C(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right)$代入非齐次方程，其中$C(x)$是待定函数；最后将带有$C(x)$的解代入非齐次方程中，可以通过一次不定积分求解$C(x)$。

Bernoulli方程

方程形式：$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$，其中$\alpha \neq 0, 1$为常数。（如$\alpha$为0或1则化为一阶线性方程无需特别讨论）
求解思路：换元$z = y^{1-\alpha}$，化为关于$z(x)$的一阶线性方程。

例 6. 求解常微分方程$y' + y\tan x = \sec x$。

分析：本题为一阶线性方程，解法为常数变异法，首先求解齐次方程，然后求解非齐次问题

Proof. 首先求解齐次方程
$$y' + y\tan x = 0, \tag{32}$$
容易验证齐次方程具有通解
$$y = C\exp\left(-\int \tan x\mathrm{d}x\right) = C|\cos x|, \tag{33}$$
考虑到方程中的正切函数在点$k\pi + \frac{\pi}{2}$没有定义，因此研究方程的解只能在一个周期$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$讨论即可，在每一个区间里$\cos x$的符号都是不变的，因此齐次方程(32)的通解可以写为
$$y = C\cos x, \tag{34}$$
其中C为任意实数。

接着使用常数变异法求解题目的非齐次方程，设非齐次方程的解具有形式
$$y = C(x)\cos x, \tag{35}$$
代入原方程有
$$C'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}, \tag{36}$$
因此
$$C(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C_1, \tag{37}$$

其中C_1是任意常数，因此原方程通解为

$$y = C_1 \cos x + \sin x. \tag{38}$$

□

例 7. 求解*Bernoulli*方程$y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$。

分析：Bernoulli方程是可以化为一阶线性方程的方程，虽然其本身不是线性方程。

Proof. 考虑换元$z = y^{-1}$，化简得

$$z' = \frac{-y'}{y^2} = \frac{y - y^2(\cos x - \sin x)}{y^2} = z - (\cos x - \sin x), \tag{39}$$

因此得到一阶线性非齐次方程

$$z' - z = \sin x - \cos x. \tag{40}$$

首先求解齐次方程$z' - z = 0$得到解$z = Ce^x$，其中C是任意常数。接着使用常数变异法求解题目的非齐次方程，考虑方程(40)的解具有形式

$$z = C(x)\mathrm{e}^x, \tag{41}$$

代入方程(40)得

$$C'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\sin x - \cos x), \tag{42}$$

做不定积分得到（这一不定积分为上册不定积分讲义的一道例题）

$$C(x) = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + C_1, \tag{43}$$

其中C_1为任意实数。因此方程(40)通解为

$$z = -\sin x + C_1\mathrm{e}^x, \tag{44}$$

因此原方程通解

$$y = \frac{1}{C_1\mathrm{e}^x - \sin x}. \tag{45}$$

□

恰当方程系列

之前两个系列的方法都针对一阶常微分方程，恰当方程系列方法针对之前两类方法处理不了的一阶常微分方程。

恰当方程（全微分方程）

方程形式：$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，其中方程左端是某个原函数的全微分，等价于$\partial_y P=\partial_x Q$对一切$(x,y)$成立。

求解思路：找原函数$u(x,y)$使得全微分$\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$成立，方程的通解为$u(x,y)=C$，其中$C$是常数。

备注：[1]满足$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的全微分方程，其判定方法是通过$\partial_y P=\partial_x Q$，这一点是曲线积分路径无关性部分的结论。相较曲线积分无关性的命题中严格要求在单连通区域考虑，常微分方程的解通常只关心局部性质，所以无需考虑P,Q所在定义域是否单连通；[2]计算原函数的方法包括积分法、凑微分法和观察法，在课本8.3节有详细说明。

积分因子法

方程形式：不属于上述各类的一阶方程，假定具有形式$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$。

求解思路：寻找积分因子$\mu(x,y)$，将方程化为等价的恰当方程$(M\mu)dx+(N\mu)dy=0$，然后求解恰当方程。寻找积分因子的方法有两种：[1]公式法，如果$F=\frac{\partial_y M-\partial_x N}{N}$只与$x$有关，那么$\mu=\exp\left(\int F(x)\mathrm{d}x\right)$是一个积分因子；如果$G=\frac{\partial_x N-\partial_y M}{M}$只与$y$有关，那么$\mu=\exp\left(\int G(y)\mathrm{d}y\right)$是一个积分因子；[2]观察法，使用各种方法凑出合适的积分因子。

备注：积分因子通常不唯一，只需找到一个即可。

例 8. 求解常微分方程$\frac{2x-1}{y}\mathrm{d}x+\frac{x-x^2}{y^2}\mathrm{d}y=0$。

Proof. 设$P(x,y)=\frac{2x-1}{y}$和$Q(x,y)=\frac{x-x^2}{y^2}$。经验证

$$\partial_y P=\partial_x Q=\frac{1-2x}{y^2}. \tag{46}$$

因此本题为恰当方程，需要计算原函数。通过凑微分的方式观察到

$$\frac{2x}{y}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y}\right),\quad -\frac{1}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(-\frac{x}{y}\right). \tag{47}$$

因此本题通积分为

$$\frac{x^2}{y}-\frac{x}{y}=C. \tag{48}$$

化简得

$$x^2-x=Cy. \tag{49}$$

其中C为任意实数。 □

例 9. 求解常微分方程$y\mathrm{d}x+(x-1-xy)\mathrm{d}y=0$。

分析：本题不属于上述任何一类方程，故尝试使用积分因子法。

Proof. 设$M(x,y)=y$和$N(x,y)=x-1-xy$，计算得到

$$\partial_y M-\partial_x N=y, \tag{50}$$

因此$\frac{\partial_x N-\partial_y M}{M}=-1$只与$y$有关，因而一个积分因子是

$$\mu(x,y)=\exp\left(\int(-1)\mathrm{d}y\right)=\mathrm{e}^{-y}. \tag{51}$$

乘以积分因子得到方程

$$y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-y}(x-1-xy)\mathrm{d}y=0, \tag{52}$$

可以验证此方程为恰当方程

$$\partial_y\left(y\mathrm{e}^{-y}\right)=\partial_x\left(\mathrm{e}^{-y}(x-1-xy)\right)=\mathrm{e}^{-y}(1-y). \tag{53}$$

采用凑微分分方法（如感觉凑不出来也可以用积分法，但是比较麻烦）注意到

$$y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{-y}(1-y)=\mathrm{d}\left(xy\mathrm{e}^{-y}\right),\,0\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-y}\right). \tag{54}$$

因此得到恰当方程(52)的通积分是

$$(xy+1)\mathrm{e}^{-y}=C, \tag{55}$$

其中C是任意实数。 □

降阶系列

最后我们来看一类二阶方程的求解方法，这些特殊的二阶方程可以转化为一阶方程，然后通过此前三个系列的一阶方程求解方法得出结果。

只含y',y''不含y的二阶方程

方程形式：$G(x,y',y'')=0$。

求解思路：[1]换元$p=y'$，化为关于$p(x)$的一阶方程$G(x,p,p')=0$；[2]根据$p(x)=y'(x)$的形式积分得到$y(x)$。

备注：由于第一步求解的$p(x)$的特解含参数C，如果想对$p(x)$不定积分得到$y(x)$，有时需要根据参数C的取值分类讨论。

不含x的二阶方程（自治方程）

方程形式：$H(y,y',y'')=0$。

求解思路：[1]换元$y'=p$，化为关于$y'=p(y)$的一阶方程，其中p是以y为自变量y'为因变量的函数，此时自变量x的作用被隐藏在函数p背后；[2]利用链式法则$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\cdot(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^{-1}=\frac{y''}{y'}$，得到关于$p(y)$的一阶方程。

例 10. 求解常微分方程$(y')^2=x^2y''$。

分析：本题是二阶方程，但是只涉及x,y'和y''而不涉及y，是第一类可降阶为一阶方程的常微分方程。

Proof. 换元$p=y'$方程化简为

$$p'x^2=p^2, \tag{56}$$

此时方程为关于$p(x)$的变量分离方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x^2}, \tag{57}$$

有通解

$$p=\frac{x}{C_1x+1}, \tag{58}$$

其中C_1为任意实数。代入$z=y'$得

$$y'(x)=\frac{x}{C_1x+1}, \tag{59}$$

我们只需做不定积分求解$y(x)$。然而注意这里有一个易错点，就是对方程(59)右端的积分是依赖C_1的。如果$C_1\neq 0$，积分得到

$$y=\int\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_1(C_1x+1)}\right)\mathrm{d}x=\frac{x}{C_1}-\frac{1}{C_1^2}\ln|C_1x+1|+C_2, \tag{60}$$

其中C_2是任意实数。如果$C_1=0$积分得到

$$y=\frac{x^2}{2}+C_2, \tag{61}$$

其中C_2是任意实数。此时解(60)是通解，而解(61)有且仅有一个参数C_2，故不是二阶方程的通解而是一组特解。

最后分析其他特解，考虑到得到变量分离方程(57)时左右同除x^2p^2。如果考虑假设$x^2p^2=0$可以得特解$y\equiv C$，其中C为任意实数。 □

例 11. 求解常微分方程初值问题$\begin{cases}1+y'^2=2yy'',\\ y(1)=1,y'(1)=-1.\end{cases}$。

分析：本题是不限含x的方程，令$p=y'$并将y'看作y为自变量的函数可以将二阶方程化简为一阶方程。我们指出，由于$y'(x)$和$y(x)$本身都是x的函数，计算y'关于y变化的微分需遵循链式法则$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\cdot(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^{-1}=\frac{y''}{y'}$，由此可以写出关于$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$和$p,y$的一阶方程。

Proof. 令$p=y'$并将p看作y为自变量的函数。考虑到

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=y''(y')^{-1}=\frac{1+(y')^2}{2yy'}=\frac{1+p^2}{2py}. \tag{62}$$

因此可以得到变量分离方程

$$\frac{2p\mathrm{d}p}{1+p^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y}, \tag{63}$$

解得通积分

$$\ln\left(1+p^2\right)=\ln|y|+C, \tag{64}$$

对两侧取对数得

$$1+p^2=C_1y, \tag{65}$$

其中$C_1=\pm e^C$是任意非0实数。回代$p=y'$可以得到关于$y(x)$的一阶方程

$$1+(y')^2=C_1y \tag{66}$$

我们将y'写成只含y而不含x的表达式就可以得到由方程(66)得到一个变量分离方程

$$y'=\pm\sqrt{C_1y-1} \tag{67}$$

为了避免正负号影响，我们先代入初值条件$y'(1)=-1$和$y(1)=1$，得到参数$C_1=2$且符号取负号

$$y'=-\sqrt{2y-1}, \tag{68}$$

进一步得到变量分离方程

$$\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2y-1}}, \tag{69}$$

求得通积分

$$x+C=-\sqrt{2y-1}. \tag{70}$$

结合初值$y(1)=1$得参数$C=-2$，化简得到解

$$y=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+5\right). \tag{71}$$

□

2 经典习题

2.1 题型快速索引

在此前例题中我们已经总结了各类的标准做法，接下来的部分我们简单介绍一些进阶解法，和部分和常微分方程求解相关的有难度的证明题。

2.2 例题

题 1. 求解常微分方程$\left(1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$。

分析：容易发现本题为齐次方程，并且出现大量的项$\frac{x}{y}$。我们知道齐次方程一般换元$u=\frac{y}{x}$，由于本题的方程中项$\frac{x}{y}$较多，我们可以转而求解以y为自变量的函数$x(y)$，并使用换元$t=\frac{x}{y}$简化计算。

Proof. 我们求解函数$x=x(y)$，首先化简

$$x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}-1\right)}{1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}}, \tag{72}$$

代入换元$t=\frac{x}{y}$：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{yx'-x}{y^2}=\frac{x'-t}{y}. \tag{73}$$

然后带入x'的表达式

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{\frac{\mathrm{e}^t(t-1)}{1+\mathrm{e}^t}-u}{y}=-\frac{\frac{t+\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}}{y}. \tag{74}$$

于是可以写成变量分离方程的形式

$$-\frac{1+\mathrm{e}^t}{t+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}y}{y}. \tag{75}$$

然后得到通积分

$$C-\ln\left|t+\mathrm{e}^t\right|=\ln|y|, \tag{76}$$

其中C是任意常数。然后还可以对上述通积分做e的方幂

$$y\left(t+e^t\right)=C_1, \tag{77}$$

其中$C_1=\pm e^C$为任意非0常数。代入换元$t=\frac{x}{y}$

$$y\left(\frac{x}{y}+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right)=C_1. \tag{78}$$

最后我们讨论特解。在特解(78)考虑$C_1=0$，可以得到特解$\frac{x}{y}+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=0$，此时$\frac{x}{y}$为定值，即解为线性函数。综上，本题通积分为

$$y\left(\frac{x}{y}+e^{\frac{x}{y}}\right)=C_1, \tag{79}$$

其中C_1为任意常数。 □

题 2. 设$y=y(x)$在$[0,+\infty)$上满足微分不等式$y'+a(x)y\le 0$，证明在$[0,+\infty)$上有$y(x)\le y(0)\exp\left(-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right)$。

分析：本题为数理方程经典不等式Gronwall不等式的简化版。从形式上看，微分不等式$y'+a(x)y\le 0$与一阶线性齐次方程$y'+a(x)y=0$有些类似，后者的解为$y(x)=y(0)\exp\left(-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right)$。我们本节需要严格地借助方程的解法，推导我们需要的不等式。

Proof. 我们借助推导一阶线性齐次方程解的方法，在微分不等式左右乘以非负的积分因子$\exp\left(-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right)$得到

$$y'(x)\exp\left(-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right)+a(x)y(x)\exp\left(-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right)\le 0. \tag{80}$$

而不等式对左侧可以看作函数

$$F(x)=y(x)\exp\left(-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right), \tag{81}$$

的导函数，即$F'(x)\le 0$。由此函数$F(x)$是一个在$[0,+\infty)$单调递减的函数，即

$$y(x)\exp\left(-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right)=F(x)\le F(0)=y(0). \tag{82}$$

移项就可以得到题目要求的结论。 □

题 3. 考虑一阶线性方程$y'+p(x)y=q(x)$，如果$p(x)$和$q(x)$是在$\mathbb{R}$上定义的以$T>0$为周期的周期函数，如果$\int_0^T p(s)\mathrm{d}s\neq 0$，证明：方程存在唯一的以$T$为周期的解。

分析：由于大量数学建模场景中的函数具有周期性，因此研究常微分方程的周期解是很重要的数学课题。这道题目讨论一阶线性方程系数周期性和解周期性的关系，本身难度不大，需要我们首先依据公式写出解的形式做分析。考虑到我们要对解做定理分析，将解中的不定积分写出变限积分是比较适宜的。

Proof. 我们可以写出一阶线性方程$y'+p(x)y=q(x)$通解的形式为：

$$y(x)=\exp\left(-\int_0^x p(s)\mathrm{d}s\right)\left[C+\int_0^x q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\right], \tag{83}$$

其中C为待定常数。为了方便起见，变限积分的下限都取为0。在通解中代入$x=0$得到$y(0)=C$，如果$y(x)$是周期解就必然有$y(T)=C$，代入得到

$$C=\exp\left(-\int_0^T p(s)\mathrm{d}s\right)\left[C+\int_0^T q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\right]. \tag{84}$$

联立求解得到

$$C\left(\exp\left(\int_0^T p(s)\mathrm{d}s\right)-1\right)=\int_0^T q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s. \tag{85}$$

由于$\int_0^T p(s)\mathrm{d}s \neq 0$，所以参数$C$有唯一取值

$$C = \left(\exp\left(\int_0^T p(s)\mathrm{d}s\right) - 1\right)^{-1} \left[\int_0^T q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\right]. \tag{86}$$

然而参数如式(86)取值，只是(83)中的解为周期解的一个必要条件。我们需要证明，当参数如式(86)取值时，(83)中的解是一个周期解。首先写出

$$y(x+T) = \exp\left(-\int_0^{x+T} p(s)\mathrm{d}s\right)\left[C + \int_0^{x+T} q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\right]. \tag{87}$$

为了证明$y(x+T) = y(x)$，做商比较是计算量事宜的。我们注意到

$$\frac{y(x+T)}{y(x)} = \exp\left(-\int_x^{x+T} p(s)\mathrm{d}s\right) \frac{C + \int_0^{x+T} q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s}{C + \int_0^{x} q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s}. \tag{88}$$

为了证明等式的右端为1只需要

$$\begin{aligned} C\left[\exp\left(\int_x^{x+T} p(s)\mathrm{d}s\right) - 1\right] &= -\exp\left(\int_x^{x+T} p(s)\mathrm{d}s\right)\left[\int_0^x q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\right] \\ &\quad + \int_0^{x+T} q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{89}$$

根据函数p和q的周期性有$\int_x^{x+T} p(s)\mathrm{d}s = \int_0^T p(s)\mathrm{d}s$，所以根据式(85)，式(89)的左侧为

$$LHS = C\left[\exp\left(\int_x^{x+T} p(s)\mathrm{d}s\right) - 1\right] = \int_0^T q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s. \tag{90}$$

接下来处理式(89)的右侧的乘积项，我们先用定积分换元法得到

$$\begin{aligned} & \exp\left(\int_x^{x+T} p(s)\mathrm{d}s\right)\left[\int_0^x q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\right] \\ = & \exp\left(\int_x^{x+T} p(s)\mathrm{d}s\right)\left[\int_T^{x+T} q(s)\exp\left(\int_0^{s-T} p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\right] \\ = & \int_T^{x+T} q(s)\exp\left(\int_{s-T}^s p(t)\mathrm{d}t\right)\exp\left(\int_0^{s-T} p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\ = & \int_T^{x+T} q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{91}$$

其中第一个等号使用周期性$q(s) = q(s-T)$，第二个等号使用周期性$\int_x^{x+T} p(t)\mathrm{d}t = \int_{s-T}^s p(t)\mathrm{d}t$对一切$s$成立。整理得到式(89)的右侧为

$$\begin{aligned} RHS &= -\int_T^{x+T} q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s + \int_0^{x+T} q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^T q(s)\exp\left(\int_0^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{92}$$

因此式(89)的左右两侧相等。这说明，参数C如式(86)取值时，(83)中的解是一个周期解，并且是唯一的周期解。 □

2.3 精选补充题

补 1. *2021*春季期中考试题. 求常微分方程特解$y' = xy + 3x + 2y + 6$。

补 2. 求解常微分方程$y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$，注意本题存在无法归类到通解的特解。

补 3. 设$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$是齐次方程，证明：函数$\mu(x,y) = \frac{1}{xP+yQ}$是方程的一个积分因子。

补 4. 考虑一阶线性方程$y' + p(x)y = 0$，如果$p(x)$是在$\mathbb{R}$上定义的以$T > 0$为周期的周期函数证明：方程的任意解都是以T为周期的周期函数的充分必要条件是$\int_0^T p(s)\mathrm{d}s = 0$。

补 5. 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上的有界函数，求方程$y' + y = f(x)$在$\mathbb{R}$上所有的有界函数解。