常微分方程的一般理论

谢彦桐

北京大学数学科学学院

April 13, 2022

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。

1 知识内容理解

在上一章我们介绍了求解常微分方程特别是一阶方程的一些初等加法，然而更多的常微分方程是不能使用初等方法求解的，还有一些初等方程的解不一定唯一。本节我们将研究对象放在几类形式简单的常微分方程：一阶方程初值问题、高阶线性方程和一阶线性方程组。对于这些简单的问题，我们可以证明解的存在唯一性，甚至严格地写出通解的形式。由于本节为严格分析，我们需要指明方程解的定义域等信息。

1.1 一阶常微分方程初值问题解的存在性和唯一性

存在唯一性定理的内容和理解

这一部分我们关注的是具有下述形式的一阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (x,y) \in R. \tag{1}$$

其中f是给定函数，其定义域R是以点(x_0,y_0)为中心的矩形$[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$，特别地区间的宽度$a,b$可以是无穷。正因$f$的定义域是有限的，因此初值问题的解最多也只在局部$[x_0-a,x_0+a]$有定义。

形如(1)的一阶方程包含了广泛了实际应用中的大部分一阶常微分方程，而下面的定理告诉我们初值问题(1)的解一定存在且唯一，我们叙述定理的条件和结论：
1.条件 函数$f(x,y)$在R连续且有界，且对y有Lipschitz条件，即存在常数$L>0$，对任意的$(x,y_1),(x,y_2)\in R$，都有$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$。

2.结论 初值问题在区间$[x_0-h,x_0+h]$存在唯一解$y=y(x)$，其中

$$h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right),\ M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|. \tag{2}$$

关于这一定理，我们补充几点释疑

1.Lipschitz条件的判别 特别地，如果$f(x,y)$在y方向偏导数存在且有界，那么Lipschitz条件一定成立。所以我们常常都通过判断$f(x,y)$偏导数的有界性来判断Lipschitz条件成立。

2.解的存在区间 从题目结论可以看到，即便f在R上定义，我们找到的初值问题的解$y=y(x)$只能保证在$[x_0-h,x_0+h]$这一比$[x_0-a,x_0+a]$更小的区间上存在且唯一，因此上述结论也称**局部存在唯一性**。

3.解的延伸讨论 一个自然的问题是，我们能否将$[x_0-h,x_0+h]$解延伸到$[x_0-a,x_0+a]$上？当$f\equiv M$时，解$y=y(x)$是以M为斜率的一次函数，考虑到f只在矩形R有定义，因此$y\in[y_0-b,y_0+b]$使得解只能在$[x_0-h,x_0+h]$存在。对于更一般的情况，这是一个比较复杂的问题，后续我们会简单讨论。

最后，我们从几何观点上来看局部存在唯一性定理。如果知道$y'=f(x,y)$具有通解$y=y(x,C)$，其中C可以取遍任意实数。那么存在唯一性定理告诉我们，过任意一点(x_0,y_0)的解曲线$y=y(x,C)$总存在，对应唯一的常数C。换言之，解曲线族$y=y(x,C)$实际盖满了整个二维平面，因此过每一个平面上的点我们都可以找到一条解曲线。

*存在唯一性定理的证明与深层理解

*解的延伸与比较定理

1.2　高阶线性常微分方程解的存在性和结构

线性和齐次性

在此之前，我们首先回忆一般n阶常微分方程的形式

$$F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0, \tag{3}$$

即一个将y的各阶导数联系起来的等式。由于F取值的复杂性，我们很难穷尽任意n阶常微分方程。为此，我们考虑一类最简单的方程，即n**阶线性常微分方程**，其特点是在方程(3)中，y及其各阶导数写成线性求和的形式：

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+p_{n-1}(x)y'(x)+p_n(x)y(x)=f(x). \tag{4}$$

其中$p_j(x)(j=1,2,\cdots,n)$和$f(x)$是给定函数。我们可以看到，线性方程(4)中，只涉及y的导数与只关于x的函数乘积的叠加，而不包含y的各阶导数的乘积作用。如果右端函数$f(x)\equiv 0$，则称线性方程是**齐次的**。这里线性和齐次性的定义与我们上一章的一阶线性方程的相关定义吻合。

二阶线性方程初值问题解的存在唯一性

对于比较简单的二阶线性方程的初值问题，我们可以像此前一阶方程一样证明解的存在唯一性。初值问题的形式是

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),\, x\in[a,b], \\ y\left(x_0\right)=y_0,\, y'\left(x_0\right)=y_1, \end{cases} \tag{5}$$

其中$x_0\in[a,b]$。如果参数函数$p(x),q(x),f(x)$在$[a,b]$都连续，那么二阶线性方程初值问题(5)存在唯一解$y=y(x)$。

相较此前一阶方程的局部存在唯一性定理，这一定理的的叙述是相对干净的，解也在整个定义域$[a,b]$存在唯一。另一方面，关于二阶线性方程的结论也可以很容易地推广到n阶线性方程。

二阶线性方程的通解理论

我们接下来转而讨论二阶线性方程不带初值的情形

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),\, x\in[a,b]. \tag{6}$$

这里的讨论也是可以直接推广到n阶线性方程的，为了简单起见我们只讨论二阶。

我们在讨论中尽量去除线性代数概念。如果使用线性代数语言可以一句话概括所有结论：n阶齐次线性方程的通解构成n维线性空间，n阶非齐次线性空间的通解构成n维线性流形。

我们逐步引入下述概念、方法和结论：

- **线性无关和线性相关** 考虑定义在$[a,b]$的两个函数$f_1(x)$和$f_2(x)$，如果存在不全为0的两个参数C_1和C_2使得$C_1f_1(x)+C_2f_2(x)=0$在$x\in[a,b]$成立，则称函数f_1,f_2线性相关，否则称为线性无关。直观来看，线性相关的函数f_1和f_2在$[a,b]$各个点函数值成比例。如果将$[a,b]$上的函数以其各个点的函数值看作无穷维的向量，那么线性相关的函数f_1,f_2是共线的向量。

- **齐次线性方程通解的结构** 在式(6)中取$f\equiv 0$得到齐次方程，如果可以找到方程(6)两个线性无关的解$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$，那么方程(6)的通解是$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$，

其中C_1和C_2是待定常数。我们称线性无关的解组$\{\varphi_1,\varphi_2\}$为齐次方程(6)的**基础解系**。这里有两个问题，其一为什么齐次方程一定存在两个线性无关解构成基础解系，其二为什么通过通解$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$可以表达出齐次方程所有解。这两个问题将在题2中被解答。

- **Wronski行列式** 判断函数的线性无关性是比较麻烦的（尤其当考虑高阶方程需要判断多个函数的线性无关时），我们引入**Wronski行列式**:

$$W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\end{vmatrix}. \tag{7}$$

我们可以证明，齐次方程(6)的两个解$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$线性无关的充分必要条件是存在$W(x)$在$[a,b]$上不恒为0。（注：可以证明$W(x)$如果在一点非0那么就在$[a,b]$上点点非0，所以两个解$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$线性无关的充分必要条件只需$W(x)$在一点值非0即可，证明见题1）

- **非齐次线性方程通解的结构** 考虑二阶非齐次线性方程(6)，我们先得到对应的齐次方程的基础解系$\{\varphi_1,\varphi_2\}$，然后再找到非齐次方程的任意特解$y^*(x)$，那么方程(6)的通解是$y^*(x)+C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$，其中$C_1$和$C_2$是待定常数。

因此如果想要求解齐次线性方程的通解，我们只需找到方程的基础解系。如果想要求解非齐次线性方程的通解，我们必须先求出对应齐次方程的基础解系，再猜出方程的一个特解。求解基础解系成为线性方程求解问题的核心，对于一般的线性方程基础解系也是不可求的，所以接下来我们讨论更特殊的常系数线性方程。

1.3 n阶常系数线性常微分方程的解法

本节涉及的n阶常系数线性方程形如

$$y^{(n)}(x)+p_1y^{(n-1)}(x)+\cdots+p_{n-1}y'(x)+p_ny(x)=f(x), \tag{8}$$

其中$p_j(j=1,2,\cdots,n)$是常系数，$f(x)$是给定函数。这一非齐次方程对应的齐次方程是

$$y^{(n)}(x)+p_1y^{(n-1)}(x)+\cdots+p_{n-1}y'(x)+p_ny(x)=0. \tag{9}$$

课程要求掌握任意阶齐次常系数线性方程的解法和二阶非齐次常系数线性方程的解法。

基础解系的计算

考虑n阶齐次常系数线性方程(9)，计算基础解系的本质是找方程n个线性无关的解。下面的**特征方程法**给出了求解基础解系的通法，并且保证了找到的解一定是线性无关的。我们首先求解方程(9)对应的**特征方程**

$$\lambda^k+p_1\lambda^{k-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0 \tag{10}$$

特征方程的解称为**特征值**，这里方程的解包括复数解。根据特征值的不同，我们可以直接确定基础解系的形式，每一个特征值对应基础解系的一个函数，分为四种情况：

1.单实根λ 对应函数$\mathrm{e}^{\lambda x}$。

2.m**重实根**λ 对应m个函数$\mathrm{e}^{\lambda x}, x\mathrm{e}^{\lambda x}, \cdots, x^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$.

3.单虚根$a \pm b\mathrm{i}$ 分别对应函数$\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$。

4.m**重虚根**$a\pm b\mathrm{i}$ 分别对应m个函数 $\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\cdots x^{m-1}\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), x^{m-1}\mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$。

关于特征值我们有几点释疑：

1.虚根成对原理 我们指出特征方程(10)是实系数多项式方程，这类方程的重要性质是虚根成对原理，即如果虚数$a+b\mathrm{i}$是方程(10)的根，那么其共轭虚数$a-b\mathrm{i}$也是方程(10)的根。这也是我们在讨论虚特征值时直接考虑两个虚数$a \pm b\mathrm{i}$的缘由。

2.实虚特征值对应函数的等价性 我们将虚根$a \pm b\mathrm{i}$代入e的指数，利用欧拉公式可以计算$\mathrm{e}^{(a\pm b\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{ax}(\cos bx \pm \mathrm{i}\sin bx)$。考虑到基础解系必须是实值函数，我们构造线性等价的基础解系函数$\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$。由此，实特征值和虚特征值对应基础解系中的函数形式上实际等价。

3.求解特征方程的方法 求解多项式方程形式的特征方程的方法是因式分解法，即将方程(10)左侧的多项式函数因式分解为小于等于2次的多项式的成绩。这里给出一个因式分解定理，如果多项式$P(x)$具有实根x_0，那么$P(x)$一定可以因式分解出项$x-x_0$，由此通过因式分解提出一次项。

例 1. 求解齐次线性常微分方程的通解：

1.$y''' - y'' - 2y' = 0$。

2.$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' - 4y'' + 3y' - y = 0$。

分析：求解齐次常系数线性常微分方程的方法都是通过解特征方程得到基础解系，然后组合出齐次方程特解的形式。通过这一例题为大家展示特征值对应基础解系中的函数的方法。

Proof. **1.**写出本题特征方程为

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0, \tag{11}$$

对特征方程进行因式分解

$$\lambda(\lambda-2)(\lambda+1) = 0, \tag{12}$$

因此特征方程有三个不同的实特征值0,2,-1（即每个特征值的重数为1），所以方程的基本解组为$1, \mathrm{e}^{-x}, \mathrm{e}^{2x}$。因此方程齐次通解是

$$y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\mathrm{e}^{2x}, \tag{13}$$

其中C_1, C_2, C_3是待定常数。

2.写出本题特征方程为

$$\lambda^5-3\lambda^4+4\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1=0, \tag{14}$$

对特征方程进行因式分解

$$(\lambda-1)^3(\lambda^2+1)=0, \tag{15}$$

因此特征方程有一个三重实特征值1和两个不同的虚特征值$\pm i$，所以方程的基本解组为$\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x, x^2\mathrm{e}^x, \cos x, \sin x$。因此齐次方程通解是

$$u=\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)\mathrm{e}^x+C_4\cos x+C_5\sin x, \tag{16}$$

其中C_1, C_2, C_3, C_4, C_5是五个待定参数。

□

非齐次方程特解的计算

我们只考虑二阶的非齐次常系数线性方程。相较齐次方程，我们需要额外猜出非齐次方程的一个特解。假定我们考虑的二阶方程是

$$y''(x)+py'(x)+qy(x)=f(x). \tag{17}$$

得到特解的方法为**待定系数法**，其思路是根据左端非齐次项$f(x)$的形式“有依据地”猜出非齐次方程特解应具有的形式，最后通过配平系数得出非齐次方程的特解。如果方程(17)成立，那么特解$y=y^*(x)$及其一阶导数y'和二阶导数y''的形式必须于f接近。由此可以猜测出特解的形式。在课本上将$f(x)$分为五类，对于不同类的非齐次项，还需要考虑特征值的影响，相见课本193页的表格。

例 2. 求解常微分方程$2y''-4y'-6y=3\mathrm{e}^x$和$2y''-4y'-6y=3\mathrm{e}^{-x}$。

分析：由于特征值$-1,3$，本题的第一个方程特解形式为$y^*(x)=A\mathrm{e}^x$，第二个方程的特解形式为$y^*(x)=Ax\mathrm{e}^{-x}$。我们在计算第二个方程的特解时，将演示如果错误的代入特解形式$A\mathrm{e}^{-x}$会发生什么情况。

Proof. 考虑两个方程对应的齐次方程

$$2y''-4y'-6y=0, \tag{18}$$

其特征多项式$2\lambda^2-4\lambda-6=0$有特征值$-1,3$，因此齐次方程通解

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}, \tag{19}$$

其中C_1, C_2是实数。

接下来分别用待定系数法求非齐次方程特解。由于1不是特征值，第一个方程特解形式为$y^*(x) = A\mathrm{e}^x$，其中A是待定系数。代入方程得到

$$-8A\mathrm{e}^x = 3\mathrm{e}^x, \tag{20}$$

求解得$A = -\frac{3}{8}$，得到一个特解

$$y^*(x) = -\frac{3}{8}\mathrm{e}^x, \tag{21}$$

结合齐次方程通解(19)可得第一个非齐次方程通解

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{3x} - \frac{3}{8}\mathrm{e}^x. \tag{22}$$

由于-1是单特征值，第二个方程特解形式为$y^*(x) = Ax\mathrm{e}^{-x}$，其中$A$是待定系数。代入方程得到

$$A\mathrm{e}^{-x}\left[2x - 4(1-x) - 6(x-2)\right] = 8A\mathrm{e}^{-x}. \tag{23}$$

求解得$A = \frac{3}{8}$，得到一个特解

$$y^*(x) = \frac{3}{8}x\mathrm{e}^x, \tag{24}$$

结合齐次方程通解(19)可得第二个非齐次方程通解

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{3x} + \frac{3}{8}x\mathrm{e}^x. \tag{25}$$

这里如果我们不遵从193页表格的规律，强行将第二个非齐次方程的特解定为$y^*(x) = A\mathrm{e}^{-x}$。考虑到齐次方程(18)的基础解系中包含解$\mathrm{e}^{-x}$，因此特解$y^*(x) = A\mathrm{e}^{-x}$就包含在齐次方程的通解中，而齐次方程的通解必然不能是非齐次方程的特解。正因为形如$y^*(x) = A\mathrm{e}^{-x}$的解不是特解，所以我们在猜测第二个非齐次方程特解形式时，在e^x项乘上x。

□

例 3. 求解常微分方程$y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$。

分析：本题的非齐次项$3 + 4\sin 2x$乍看不属于193页表格五类的任一类，但是我们可以将非齐次项拆成两项，分别寻找非齐次方程$y'' + 2y' = 3$和$y'' + 2y' = 4\sin 2x$的特解，它们的特解都是可求的。这种拆项技巧在求特解中非常重要。

Proof. 考虑对应的齐次方程

$$y'' + 2y' = 0, \tag{26}$$

其特征多项式$\lambda^2+2\lambda=0$有特征值$-2,0$，因此齐次方程通解

$$y(x)=C_1+C_2\mathrm{e}^{-2x}, \tag{27}$$

其中C_1,C_2是实数。

我们将非齐次项拆成两部分分别计算特解：第一部分非齐次方程$y''+2y'=3$的非齐次项为常数3，可肉眼观察其特解$y_1^*(x)=\frac{3}{2}x$。第二部分非齐次方程$y''+2y'=4\sin 2x$，由于$2\mathrm{i}$不是特征值，可假设具有特解

$$y_2^*(x)=A\sin 2x+B\cos 2x, \tag{28}$$

其中A,B是待定系数。代入方程得到

$$(-4A-4B)\sin 2x+(4A-4B)\cos 2x=4\sin 2x, \tag{29}$$

求解得$A=B=-\frac{1}{2}$，得到一个特解

$$y^*(x)=-\frac{\sin 2x+\cos 2x}{2}, \tag{30}$$

结合齐次方程通解(27)可得非齐次方程通解

$$y(x)=C_1+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\frac{3}{2}x-\frac{\sin 2x+\cos 2x}{2}. \tag{31}$$

□

例 4. 求解常微分方程$y''-5y'+6y=(12x-7)e^{2x}$。

分析：本题非齐次项为$(12x-7)\mathrm{e}^{2x}$，属于$P(x)\mathrm{e}^{ax}$的形式，其中$P(x)$是多项式。由于2是特征值，需要假设特解形式$y^*(x)=x(Ax+B)\mathrm{e}^{2x}$。

Proof. 考虑对应的齐次方程

$$y''-5y'+6y=0, \tag{32}$$

其特征多项式$\lambda^2-5\lambda+6=0$有特征值$2,3$，因此齐次方程特解

$$y(x)=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}, \tag{33}$$

其中C_1,C_2是实数。

由于2是方程特征值，取特解

$$y_1^*(x)=x(Ax+B)\mathrm{e}^{2x}, \tag{34}$$

其中A,B为待定系数。再将新特解代入原方程

$$\mathrm{e}^{2x}\left[-2Ax+(2A-B)\right]=(12x-7)\mathrm{e}^{2x}. \tag{35}$$

求解得$A=-6, B=-5$，得到一个特解

$$y^*(x)=-x(6x+5)\mathrm{e}^{2x}, \tag{36}$$

结合齐次方程通解(33)可得非齐次方程通解

$$y(x)=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}-x(6x+5)\mathrm{e}^{2x}. \tag{37}$$

这里如果我们错误地选用如下特解形式

$$y^*(x)=(Ax+B)\mathrm{e}^{2x}, \tag{38}$$

其中A是待定系数。代入方程得到

$$-Ae^{2x}=(12x-7)e^{2x}, \tag{39}$$

这说明不论A, B取何值解(38)都不会是非齐次方程的特解，因此特解(38)的 • 假设方式是错误的。究其原因，是特解(38)的项$B\mathrm{e}^{2x}$包含在齐次方程的基础解系里，并没有起作用。作为替代，我们才选择了形如(34)的特解形式。

□

常数变异法

我们这里介绍的常数变异法，是另一种求解二阶非齐次常系数线性方程的方法。相较于待定系数法猜测特解的思路，常数变异法直接假设出通解非齐次方程(17)的形式。我们假定非齐次方程(17)对应的齐次方程具有特解

$$y(x)=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x), \tag{40}$$

其中C_1, C_2是两个待定常数。我们借此直接假设非齐次方程(17)的通解的形式是

$$\hat{y}(x)=C_1(x)\varphi_1(x)+C_2(x)\varphi_2(x), \tag{41}$$

这里$C_1(x), C_2(x)$从待定常数变成了待定函数，我们将解(41)代入非齐次方程(17)，自然可以得到关于$C_1(x)$和$C_2(x)$的关系式。

如果稍加计算就会发现关于$C_1(x)$和$C_2(x)$的关系式非常复杂，而且两个未知的函数用一个方程确定，因此未知函数$C_1(x)$和$C_2(x)$的选取方式不唯一。为此我们增设条件$C_1'(x)\varphi_1(x)+C_2'(x)\varphi_2(x)=0$，利用这一补充特解我们可以得到关于$C_1(x)$和$C_2(x)$的方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x)+C_2'(x)\varphi_2(x)=0, \\ C_1'(x)\varphi_1'(x)+C_2'(x)\varphi_2'(x)=f(x). \end{cases} \tag{42}$$

经验证，只要$C_1(x)$和$C_2(x)$满足方程组(42)，得到的解(41)就一定是非齐次方程(17)的解。而方程组(42)的求解可以通过线性方程组得到导数$C_1'(x)$和$C_2'(x)$，分别做不定积分就可以得到满足条件的$C_1(x)$和$C_2(x)$。

综上，我们在此总结用常数变异法求解二阶非齐次常系数线性方程(17)的思路：
1.得到方程(17)对应齐次问题的通解(40)。
2.假设非齐次方程(17)的通解具有形式(41)。
3.求解方程组(42)得到导数$C_1'(x)$和$C_2'(x)$。
4.不定积分并代入通解(41)得到非齐次方程(17)的通解。

值得一提的是，常数变异法的计算量一般大于直接通过待定系数法猜特解，因此常数变异法常应用于非齐次项不属于五类常见形式，或是实在无法猜出非齐次方程特解的情形。

例 5. 设参数$\beta > 0$，$f(x)$是连续函数，求解常微分方程$y'' - \beta^2 y = f(x)$。

分析：本题的非齐次项为$f(x)$是一般函数，因此无法使用待定系数法计算特解，我们采用常数变异法。

Proof. 首先考虑对应的齐次方程

$$y'' - \beta^2 y = 0, \tag{43}$$

求解特征方程$\lambda^2 - \beta^2 = 0$，因此有两个特征值$\lambda = \pm\beta$，写出计算齐次方程(43)通解

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\beta x} + C_2 \mathrm{e}^{-\beta x}, \tag{44}$$

其中C_1, C_2是两个常数。

接着求解题目的非齐次方程，采用常数变异法可以得到非齐次方程通解的形式

$$\hat{y}(x) = C_1(x)\mathrm{e}^{\beta x} + C_2(x)\mathrm{e}^{-\beta x}, \tag{45}$$

代入方程组(42)得到关于$C_1'(x)$和$C_2'(x)$的方程

$$\begin{cases} C_1'(x)\mathrm{e}^{\beta x} + C_2'(x)\mathrm{e}^{-\beta x} = 0, \\ \beta C_1'(x)\mathrm{e}^{\beta x} - \beta C_2'(x)\mathrm{e}^{-\beta x} = f(x). \end{cases} \tag{46}$$

解得

$$C_1'(x) = \frac{1}{2\beta}\mathrm{e}^{-\beta x} f(x), \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2\beta}\mathrm{e}^{\beta x} f(x). \tag{47}$$

因此通过变限积分写出$C_1(x)$和$C_2(x)$的形式

$$C_1(x) = \frac{1}{2\beta}\int_0^x \mathrm{e}^{-\beta t} f(t)\mathrm{d}t + D_1, \quad C_2(x) = -\frac{1}{2\beta}\int_0^x \mathrm{e}^{\beta t} f(t)\mathrm{d}t + D_2, \tag{48}$$

其中D_1, D_2是待定常数。代入得到方程的通解

$$y(x) = D_1 \mathrm{e}^{\beta x} + D_2 \mathrm{e}^{-\beta x} + \frac{1}{2\beta} \int_0^x f(t) \left(\mathrm{e}^{\beta(t-x)} - \mathrm{e}^{\beta(x-t)} \right) \mathrm{d}t. \tag{49}$$

□

1.4 常系数线性常微分方程组的解法

最后我们研究一类常系数线性常微分方程组的解法，两个方程的常系数线性常微分方程组可以通过消元法转化为二阶常系数线性常微分方程处理。考虑如下常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_1 x + a_2 y + f_1(t), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = b_1 x + b_2 y + f_2(t). \end{cases} \tag{50}$$

我们可以通过消元的方法得到一个只含$x(t)$不含$y(t)$的方程。方法是首先根据第一个方程得到关于$y(t)$的表达式

$$y(t) = \frac{1}{a_2} \left(x'(t) - a_1 x(t) - f_1(t) \right), \tag{51}$$

然后代入第二个方程

$$\frac{1}{a_2} \left(x''(t) - a_1 x'(t) - f_1'(t) \right) = b_1 x + \frac{b_2}{a_2} \left(x'(t) - a_1 x(t) - f_1(t) \right) + f_2(t). \tag{52}$$

特别地如果$a_2 = 0$则第一个方程就不依赖y了，所以上述消元法只针对$a_2 \neq 0$的情况。由此得到关于$x''(t)$的二阶方程

$$x''(t) - (a_1 + b_2) x'(t) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x(t) = f_1'(t) + a_2 f_2(t) - b_2 f_1(t). \tag{53}$$

我们指出方程(53)不需要记忆，同学们只需掌握将常系数常微分方程组(50)转化为二阶常微分方程(53)的消元法即可。

2 经典习题

本节的题目大多为上述已经举例的方程特解计算题。接下来我们会补充一些与二阶线性方程性质有关的证明题。这些证明题有些需要用到二阶线性方程解的理论，有些则只需要一元微积分知识就可以证明。

2.1 例题

题 1. 考虑(a,b)上的二阶线性齐次常微分方程

$$y''(x) + p(x) y'(x) + q(x) y(x) = 0. \tag{54}$$

如果齐次方程具有两个不同解$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$，用$W(x)$表示其*Wronski*行列式，证明：如果$W(x)$在(a,b)存在零点x_0，那么$W(x)$在(a,b)恒为*0*。

分析：本题说明Wronski行列式$W(x)$只有两种情况，或者$W(x)$恒为0，或者$W(x)$在每一点均非0。另一方面，讨论Wronski行列式的前提是$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$都是二阶齐次方程的解，否则讨论Wronski行列式没有意义。

Proof. 我们写出Wronski行列式的形式

$$W(x)=\varphi_1(x)\varphi_2'(x)-\varphi_1'(x)\varphi_2(x). \tag{55}$$

求导并代入二阶齐次方程

$$\begin{aligned} W'(x) &= \varphi_1(x)\varphi_2''(x)-\varphi_1''(x)\varphi_2(x) \\ &= \varphi_1(x)\left(-p(x)\varphi_2'(x)-q(x)\varphi_2(x)\right)-\left(-p(x)\varphi_2'(x)-q(x)\varphi_1(x)\right)\varphi_1(x) \\ &= -p(x)(\varphi_1(x)\varphi_2'(x)-\varphi_1'(x)\varphi_2(x))=-p(x)W(x). \end{aligned} \tag{56}$$

求解一阶线性方程得到

$$W(x)=W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s\right). \tag{57}$$

因此如果x_0是$W(x)$的零点，那么$W(x)$一定恒为0。 □

题 2. 考虑(a,b)上的二阶线性齐次常微分方程

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0, \tag{58}$$

其中$p(x),q(x),r(x)$都是(a,b)上的连续函数，证明：
1.方程存在两个线性无关的解$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$。
2.任意两个线性无关的解$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$没有公共零点。
3.方程的任意解都包含在通解$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$内。

分析：和线性方程通解结构有关的习题，其解题思路大多是建立解和初值的联系，并借助线性代数方法求解。如果没有学过线性代数，理解起来可能会有些别扭。

Proof. 任取$x_0\in(a,b)$，我们考虑初值问题

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0,\ x\in(a,b), \\ y\left(x_0\right)=y_0,\ y'\left(x_0\right)=y_1. \end{cases} \tag{59}$$

根据解的存在唯一性理论，任取一组$(y_0,y_1)\in\mathbb{R}^2$，初值问题(59)一定存在一组唯一的解$y(x)$，由此我们可以构造有平面点(y_0,y_1)到齐次方程初值问题的解$y(x)$的映射

$$T:\mathbb{R}^2\to \text{齐次方程解空间},\quad (y_0,y_1)\mapsto y(x). \tag{60}$$

借助映射T，我们可以证明本题的三个结论。

1.我们取平面上的点(y_0,y_1)和(y_0,y_2),其中$y_0\neq 0$且$y_1\neq y_2$，映射T必然可以将两个点映成满足初值条件的两个函数$\varphi_1(x)=T(y_0,y_1)$和$\varphi_2(x)=T(y_0,y_2)$。它们都是齐次方程(58)的解，分别满足初值条件

$$\begin{cases}\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)=y_0\\ \varphi_1'(x_0)=y_1,\,\varphi_2'(x)=y_2.\end{cases}\tag{61}$$

代入Wronski行列式

$$W(x_0)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x_0)&\varphi_2(x_0)\\ \varphi_1'(x_0)&\varphi_2'(x_0)\end{vmatrix}=y_0y_2-y_0y_1\neq 0.\tag{62}$$

因此初值条件(y_0,y_1)和(y_0,y_2)对应的两个解φ_1和φ_2是线性无关的。

2.如果方程的两个线性无关解$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$存在相同的零点x_0，即$\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)=0$。代入Wronski行列式

$$W(x_0)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x_0)&\varphi_2(x_0)\\ \varphi_1'(x_0)&\varphi_2'(x_0)\end{vmatrix}=0.\tag{63}$$

根据题1结论，如果Wronski行列式存在零点x_0，那么Wronski行列式必然恒为0，由此$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$是线性相关的，这推出矛盾。

3.本题如果不使用线性代数的语言叙述，无论如何都是非常别扭的，因此我们先给出借助线性代数方法的做法。考虑此前给出的映射(60)，可以验证T是线性空间$\mathbb{R}^2$到解集空间的线性映射。另一方面，借助初值问题(59)解的存在唯一性，我们知道齐次方程(58)的解和初值(y_0,y_1)是一一对应的，因此映射T是线性空间之间的同构。根据同构的性质，线性空间$\mathbb{R}^2$和解集空间一定具有相同的维度，即都是二维。所以方程的任意解都包含在通解$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$内。 □

题 3. 考虑$[a,b]$上的二阶线性常微分方程边值问题:

$$\begin{cases}y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x),\,x\in(a,b)\\ y(a)=A,\,y(b)=B.\end{cases}\tag{64}$$

其中$p(x),q(x),r(x),f(x)$都是(a,b)上的给定函数，A,B为给定实数。如果$q(x)<0$对一切$x\in(a,b)$成立，那么方程至多只有一个解$y(x)$。

分析：本题使用反证法证明，证明并没有用到常微分方程的知识，而是一元微积分理论的应用。

Proof. 我们假定边值问题(64)存在两个不同的解$y_1(x)$和$y_2(x)$，记差函数$D(x)=y_2(x)-y_1(x)$。把两个不同的解$y_1(x)$和$y_2(x)$代入边值问题(64)可以得到关于$D(x)$的方程:

$$\begin{cases}D''(x)+p(x)D'(x)+q(x)D(x)=0,\,x\in(a,b)\\ D(a)=0,\,y(b)=0.\end{cases}\tag{65}$$

$\square$

由于$D(x)$是不恒为0的函数，那么$D(x)$在(a,b)存在正的最大值，设$D(x)$在点x_0取正最大值$D(x_0)=M$，根据极值点原理有$D'(x_0)=0$和$D''(x_0)\leq 0$，因此

$$D''(x)+p(x)D'(x)+q(x)D(x)\leq q(x)D(x)<0. \tag{66}$$

这与$D(x)$所满足的二阶线性方程矛盾。因此边值问题(64)不存在两个不同的解$y_1(x)$和$y_2(x)$

题 4. 通过常微分方程理论可以刻画化学反应中反应物浓度的变化。考虑双向化学反应$A\rightleftharpoons B$，我们用函数$A_1(t)$和$A_2(t)$表示反应物浓度随时间的变化。如果双向的反应常数为正数k_1,k_2，那么反应物浓度满足下述方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A=-k_1A+k_2B, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B=k_1A-k_2B. \end{cases} \tag{67}$$

假定反应物的初始浓度为$A(0)=A_0>0$和$B(0)=B_0>0$，回答下列问题

1.计算反应物浓度$A(t)$和$B(t)$。

2.化学反应中的熵函数定义为$G(t)=-A\left(1+\ln(k_1A)\right)-B\left(1+\ln(k_2B)\right)$，证明$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G\geq 0$。