北京大学高等数学B习题课讲义：导数

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后修改：2022.10

1 知识点整理

1.1 导数的定义

导数的严格极限定义

导数的数学严格定义是逐点的，我们首先给出严格定义：

定义 1.1. 设$f(x)$在邻域$U_r(a)$定义，如果极限$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$收敛于实数$l$，则称$f(x)$在点$x=a$处**可导**且导数为$l$，记为$f'(a)=l$。

因此，当我们判断一点是否可导，只要判断极限$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$是不是收敛即可。我们熟悉的几类基本初等函数都在定义域每一个点具有可导性，我们也非常熟悉这些函数的导函数。但是读者不因忘记在这些函数背后“可导”这一概念的基本定义，对于复杂函数的求导问题一律应该从定义出发。

利用单侧极限性质，我们也可以定义左导数和右导数：

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, f'_-(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{1}$$

借助函数极限理论，我们不难验证可导等价于左右导数均存在且相等。

例 1. 计算函数$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1} & ,x\neq 0,\\ 0 & ,x=0,\end{cases}$在$x=0$的左导数和右导数，并判断$f(x)$在$x=0$是否可导。

分析：本题涉及的极限$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}$是经典的不收敛极限，需要同学们格外注意。

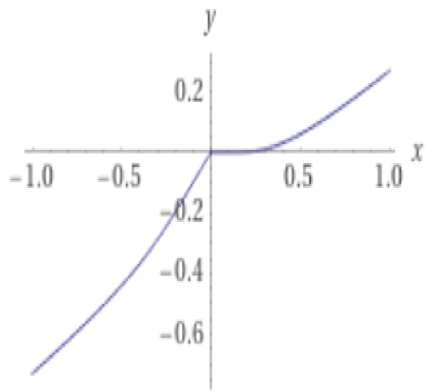

图 1: 例1的$f(x)$示意图

Proof. 计算左极限

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-0} \frac{\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}+1} - 0}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = 1. \tag{2}$$

这里当$x\to 0-0$有$\frac{1}{x}\to -\infty$，因此$e^{\frac{1}{x}}\to 0$，得出$f'_-(0)=1$。另一方面，计算右极限

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}+1} - 0}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = 0. \tag{3}$$

这里当$x\to 0+0$有$\frac{1}{x}\to +\infty$，因此$e^{\frac{1}{x}}\to +\infty$，得出$f'_+(0)=0$。由于左右导数不相等，所以极限不存在。函数$f(x)$的示意图如图1所示。 □

导数的直观理解

在高中数学学习中，由于没有严格定义极限，部分读者对于导数的理解停留在背诵常见函数导数层面，或将导数理解为切线的斜率。本节我们将从切线斜率角度和变化率角度直观理解导数。

加入我们可以绘制$f(x)$在$x=a$的邻域$U_r(a)$的图像，对$x\neq a$，分式$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$表示连接点$(a,f(a))$和$(x,f(x))$的直线的斜率，这样的直线称为**割线**；当取变量x趋近a时，直线的斜率也不断变化，最终得到一条过点$(a,f(a))$斜率为$f'(a)$的直线，这样的直线称为**切线**。如果$f(x)=\sqrt{1-x^2}$，此时函数图像代表单位球的上半球，那么割线代表一条与图像有两个交点的直线，而切线代表一条与图像有且仅有一个交点的直线。对于更一般的$f(x)$及其图像，切线不一定与同学有且仅有一个交点，因为导数$f'(a)$只能体现$f(x)$在邻域$U_r(a)$的局部性质。

另一种理解导数的方式是变化率模型。为了方便起见，我们将自变量名字为t，代表时间；设在t时刻某物质的质量为$y=f(t)$，随着时间变化物质的质量变化。在时

间区间$[t_0,t_1]$，物质的质量由$f(t_0)$变为$f(t_1)$，那么在时间区间$[t_0,t_1]$物质质量平均变化率为$\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$，这个数值可正可负，体现了物质质量的平均变化。当我们逐渐缩短时间区间$[t_0,t_1]$，使得t_1趋近t_0，物质的变化率极限$\lim_{t_1-t_0}\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}=f'(t_0)$体现的是在$t_0$这一时刻瞬间物质质量的变化率，体现的是“瞬时”变化性质。因此导数的一种直观理解，就是瞬时变化率。

小叙微分与导数

最后我们简单介绍微分与导数的关系。微分与导数的定义基于完全不同的出发点，导数考虑的是“变化率”而微分基于“化曲为直”的想法。

考虑函数$y=f(x)$在$x=a$的邻域$U_r(a)$的图像。在自变量取值$[a,a+\Delta x]$的过程中，因变量y由$f(a)$变化到$f(a+\Delta x)$，记变化量为$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$。从图像看，图像在$(a,f(a))$和$(a+\Delta x,f(a+\Delta x))$之间的部分可能是弯曲的。但是，当$\Delta x$比较小时，我们希望将这段弯曲近似为直线，即希望图像在$(a,f(a))$和$(a+\Delta x,f(a+\Delta x))$之间的部分可以用某个直线近似，即存在某个实数$A$使得：

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0, \tag{4}$$

此时我们称$f(x)$在$x=a$处**可微**。我们称Δy和Δx为**微分**。

在$\Delta x\to 0$的视角下，Δy和Δx都是无穷小量，它们显然是同阶的无穷小量，因为Δy和$A\Delta x$之间的差是更高阶的无穷小量$o(\Delta x)$。忽略高阶无穷小量，我们得出了$\Delta y\approx A\Delta x$的结论，这就使得我们可以将变化量$\Delta x$和$\Delta y$看成具有线性关系的成比例的量。同时，比例系数$A=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}$称为**微商**，即微分$\Delta y$和$\Delta x$之商。

利用导数的定义，我们不难验证可微和可导等价，并且

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}=f'(a). \tag{5}$$

虽然如此，微分和导数的定义基于完全不同的理念，在后续学习多元函数的微分的导数时，我们能看到多元函数的可微和可导是两个完全不同的概念。

我们指出，正是由于可导/可微函数可以“化曲为直”，我们认为可导次数越多的函数具有更高的“光滑性”，意指图像更光滑。不难看到。图1中例题1的函数$f(x)$在原点附近具有明显的转折，便是“不光滑”的体现。在应用数学学科中，我们常常用“充分光滑的函数”这种说法意指可以求导任意次的函数，

此外，有时也将导数记号和微商记号混用，但是我建议读者采用数学表述上更严格的方式$f'(x)$。但这不表示微商的记号没有意义，在推导链式法则等求导公式和物理运算的过程中，微商的表述形式更直观方便。特别地，我们还需牢记，如果我们只写

出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，那么我们默认它是一个关于$x$的函数，如果想要表达$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$在某点$x=a$的函数值则记为$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}$。

可导性与连续性

关于可导性和连续性，我们有下列结论

定理 1.1. 设$f(x)$在邻域$U_r(a)$定义，如果$f(x)$在$x=a$可导，那么$f(x)$在$x=a$连续。

注意，上述结论是单点可导推出单点连续的结论。其证明只需要导数的定义即可完成，我们不做展开。需要注意的是，连续的函数并不能推出可导，例如图1所示例1的$f(x)$，便是图像在$x=0$连续，但是由于$x=0$左右两侧$f(x)$具有不同的变化率，因此$f(x)$在$x=0$不可导。

区间上的可导性和高阶可导

与连续性类似，逐点的可导也可以推广到区间上：

定义 1.2. 设$f(x)$在(a,b)定义，称$f(x)$在(a,b)**可导**，如果$f(x)$在任意$x_0\in(a,b)$可导。一些文献记为$f(x)\in D^1(a,b)$。

区间可导也可以在闭区间定义，我们需要将边界的可导改为单侧可导。如果函数$f(x)$在(a,b)可导，那么$f'(x)$在区间(a,b)有定义。特别地，如果$f'(x)$连续，我们记为$f(x)\in C^1(a,b)$。在$f'(x)$在区间(a,b)有定义的基础上，我们还可以定义二阶导数：

定义 1.3. 设$f(x)$在(a,b)可导，且导函数在$f'(x)$也可导，则称$f(x)$**二阶可导**。$f'(x)$的导数记为$f''(x)$。

显然，定义一个函数的二阶导数需要该函数至少在一个区间可以定义一阶导数。大家可以关注扩展习题1的问题。

通过一类病态函数深入理解导数的定义

虽然我们指出导数的直观理解的变化率，但是对于一些抽象的函数，变化率很难从函数本身观察得到。我们将定义的视角讨论一类病态函数的导数和高阶导数，加深对于导数的理解。

取$m\in\mathbb{N}$，我们关注下述病态函数

$$f_m(x)=\begin{cases} x^m\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases} \tag{6}$$

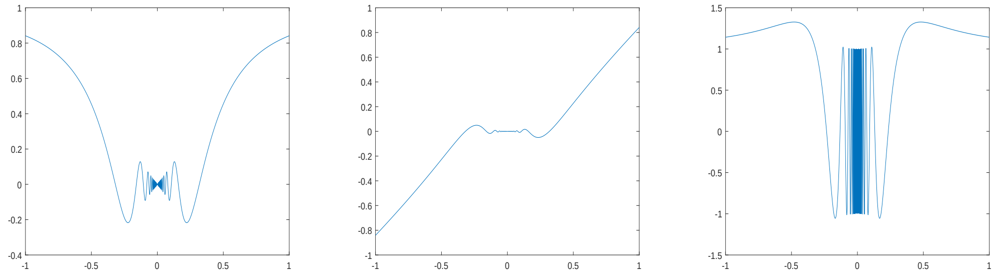

图 2: 三张图片从左向右依次为函数$f_1(x)$，$f_2(x)$和$f_2'(x)$的图像

这里m为正实数。可见，$f_m(x)$在$x=0$附近高频震荡，但是其振幅随着$x\to 0$减小为0。特别地，这里将$\sin\frac{1}{x}$替换为$\cos\frac{1}{x}$性质类似，我们只讨论正弦的情形。

在上一章学习中我们知道，$x=0$是函数$f_0(x)$的第二类间断点，因为$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在。而$x=0$是函数$f_1(x)$的连续点，因为$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$。更一般地，当$x\neq 0$时有导数$f_1'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$。对于点$x=0$，我们不能简单通过初等函数的导数性质计算$f_1'$的导数，故使用定义

$$f_1'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}. \tag{7}$$

由此$f(x)$在0处并不可导。因此$f_1(x)$在$x=0$连续却不可导。

然而当我们考虑$f_2(x)$时，对$x\neq 0$，我们依然可以计算$f_2'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$。在$x=0$处依定义计算导函数

$$f_2'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0. \tag{8}$$

由此$f_2(x)$在$\mathbb{R}$点点可导且

$$f_2'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases} \tag{9}$$

虽然如此，导函数$f_2'(x)$在点0处是间断点，属于第二类间断点。我们将三个病态函数$f_1(x)$，$f_2(x)$和$f_2'(x)$的图像绘制在图2中。

从图2可以看到。在点$x=0$附近，函数$f_1(x)$和$f_2(x)$的振幅收敛到0，但是$f_1(x)$的震荡却比$f_2(x)$剧烈得多，这直观体现了为什么$f_1(x)$在$x=0$不可导而在$f_2(x)$可导。而$f_2'(x)$的图像中0附近的振幅保持稳定且不收敛于0，这说明了为什么$x=0$是$f_2'(x)$的第二类间断点。

我们看下面的例题：

例 2. 回答下列两个问题

*1.*设参数$a \in \mathbb{R}$，函数

$$f(x)=\begin{cases} x^a\cos\frac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x=0. \end{cases} \tag{10}$$

求参数a的取值范围，使得$f(x)$在$x=0$右连续但是右导数不存在。

*2.*设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0. \\ 0, & x=0. \end{cases} \tag{11}$$

求二阶导数$f''(0)$。

Proof. **1.**首先$f(x)$是右连续的，因此极限

$$\lim_{x\to 0+0} x^a\cos\frac{1}{x}=0, \tag{12}$$

这说明$a>0$，即振幅x^a在0处收敛于0。接着$f(x)$不存在右导数，所以极限

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{x^a\cos\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0+0} x^{a-1}\cos\frac{1}{x}, \tag{13}$$

是发散的，这要求$a-1\leq 0$，此时振幅x^{a-1}不收敛于0。综上$a\in(0,1]$。

2.我们分别在$x\neq 0$和$x=0$计算$f(x)$的导函数，得到

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases} \tag{14}$$

由此计算

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\right)=0. \tag{15}$$

□

根据上述分析，我们可以给出关于病态函数$f_m(x)$可导性的一般结论

定理 1.2. 设$m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}^*$，那么

*1.*函数$f_m(x)$在*0*处n阶可导的充分必要条件是$m\geq 2n$，且$f_m^{(n)}(0)=0$。

*2.*函数$f_m(x)$的n阶导数在*0*处连续的充分必要条件是$m\geq 2n+1$。

本定理的结论超出了课程要求，不需要记住。大家只需要明白，病态函数$f_m(x)$在$x\neq 0$的任一点都是无穷次可导的，而对于$x=0$的导数或连续性必须使用定义验证。并且在$x\neq 0$的点对$f_m(x)$求导，得到的函数是形如$x^\alpha\sin\frac{1}{x}$和$x^\beta\cos\frac{1}{x}$的项的加减，当某一次导数$f_m^{(n)}(x)$得到的振幅x^α或x^β的指数小于等于0时，这说明$f_m^{(n)}(x)$在$x=0$不连续。

1.2 各类导数的计算技巧

我们这里主要介绍复合函数、反函数、参数方程、隐函数四类函数的求导技巧。以下几种函数的求导公式通常有微商记法和导数记法，微商记法非常直观却不够严格，导数记法是更严格的。（四则运算的导函数是中学内容，我们不做赘述）

复合函数

我们假定$y=f(x)$和$z=g(y)$，我们定义复合函数$z=g(f(x))=h(x)$以x为自变量，那么得到的复合函数$h(x)$的导数公式为

$$h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x), \tag{16}$$

其中项$g'(f(x))$是导函数g'在点$f(x)$处的函数值，这是需要注意的。

利用微商的表述形式，也可以写出如下形式简单的公式，被称为链式法则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \tag{17}$$

即z关于x的微商等于z关于y的微商乘以y关于x的微商。**上述表达看似非常直观，可以辅助理解，但是却有逻辑错误。**因为我们计算出的微商或导数$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$是自变量为$x$的函数，而$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$虽然是以自变量为$y$的函数，但必须通过$y=f(x)$的形式复合为$x$的函数。严格的链式法则应该写为

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right|_{y=f(x_0)}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}. \tag{18}$$

瑕不掩瑜，链式法则的形式也是非常有价值的。

例 3. ***2021高等数学B期中考试题.*** 计算函数$f(x)=x^{\arcsin x}$的导函数$f'(x)$。

分析：对于底数和指数都依赖x的函数，求导一般取对数处理。

Proof. 取对数运算

$$f(x)=x^{\arcsin x}=\exp\left(\ln x\cdot\arcsin x\right). \tag{19}$$

记$g(x)=\ln x\cdot\arcsin x$，显然有

$$g'(x)=\frac{\arcsin x}{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{20}$$

所以

$$f'(x)=\left(\mathrm{e}^{g(x)}\right)'=\mathrm{e}^{g(x)}g'(x)=x^{\arcsin x}\left(\frac{\arcsin x}{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right). \tag{21}$$

□

反函数

设$y=f(x)$是定义域上的单射，由此可以定义反函数$x=g(y)$。我们代入两种角度思考反函数的求导问题：首先，函数$y=f(x)$和函数$x=g(y)$关于直线$y=x$对称，因此函数$y=f(x)$在点$(x,f(x))$处的切线斜率和函数$x=g(y)$在点$(f(x),x)$处切线斜率乘积为1，所以

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}. \tag{22}$$

此外，从复合函数的角度思考，用反函数性质知$x=g(f(x))$对每一个x成立，在等式两边分别求导得

$$1=g'(f(x))\cdot f'(x). \tag{23}$$

显然，上述两种视角得到关于$x=g(y)$相同的结果。

不过我们需要注意，反函数$x=g(y)$是关于自变量y的函数，所以导函数$g'(y)$的自变量也必须是y，所以反函数g在y处的导数为

$$g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}. \tag{24}$$

类似我们不难写出微商形式的反函数求导公式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}, \tag{25}$$

但是我们必须关注微商的自变量名字

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}=\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=g(y_0)}}. \tag{26}$$

参数方程

我们假定函数$y=f(x)$是由参数方程确定的，即

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \qquad t\in[a,b]. \tag{27}$$

一个朴素的想法是等式$y(t)=f(x(t))$对一切t成立，故左右同时求导

$$y'(t)=f'(x(t))x'(t), \tag{28}$$

因此得到参数方程求导公式

$$f'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}, \tag{29}$$

其中$x = x(t)$。读者可能会疑惑，明明$f'(x)$的自变量是x，为什么右侧函数的自变量是t呢。实际上每一个x和t都根据参数方程关系$x = x(t)$存在对应关系，我们考虑$x = x(t)$的反函数就有$t = t(x)$，那么参数方程求导公式的准确形式应该是

$$f'(x) = \frac{y'(t(x))}{x'(t(x))}. \tag{30}$$

但是反函数$t(x)$的表达式常常无法显式写出，所以我们允许$f'(x)$的不等式包含自变量t。

从微商的角度也可以计算

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}. \tag{31}$$

由此得到求导公式

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \frac{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}}{\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}}, \tag{32}$$

其中$x_0 = x(t_0)$。

我们通过下面的例题直观理解参数方程的求导运算

例 4. 设$a > 0$，考虑参数方程$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

分析：本题为参数方程求导问题，同学们需额外关注参数方程二阶导数的计算方法。

Proof. 容易计算一阶导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t. \tag{33}$$

要计算参数方程二阶导，应首先在(33)的基础上把$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$写成关于$x$的表达式，然后用复合函数求导法。我们假定$t$关于$x$的关系式为$t = t(x)$（我们暂时不需要它的具体表达式），它是$x = a\cos^3 t$的反函数，由反函数求导法则计算

$$t'(x) = \frac{1}{-3a\cos^2(t(x))\sin(t(x))} \tag{34}$$

由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\tan t(x)$对$x$再求一次导数

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{t'(x)}{\cos^2(t(x))} = -\frac{1}{(-3a\cos^2 t\sin t)\cos^2 t} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}. \tag{35}$$

□

隐函数

由于隐函数的严格定义依赖多元函数的性质，本节仅仅就隐函数求导做基本介绍。所谓隐函数，是指不由具体表达式，而由某个等式确定。例如等式$h(x,y)=y^2-2xy-x^2+2x-4=0$，对于每一个给定的$x$，如果可以解出一个$y(x)$使得$(x,y(x))$满足等式，由于$y(x)$并没有给出显式表达式，就称$y(x)$是一个隐函数。

对于一般的等式$h(x,y)=0$确定的隐函数，什么样的x我们可以解出符合等式的y，以及对于给定的x我们有没有可能解出两个y使得x到y的对应关系是一对二从而不是函数，这两个问题的回答依赖多元函数的知识故不赘述。在本节计算隐函数导数时，我们一律默认隐函数在定义域里存在。此外我们本节并无法对一般形式的隐函数求导，我们便以$h(x,y)=y^2-2xy-x^2+2x-4=0$为例演示隐函数的导数的计算方法。

假定$h(x,y)=y^2-2xy-x^2+2x-4=0$确定了隐函数$y=y(x)$，那么关于$x$的等式恒成立：

$$G(x)=(y(x))^2-2xy(x)-x^2+2x-4=0. \tag{36}$$

由此对x求导得

$$2y(x)y'(x)-2y(x)-2xy'(x)-2x+2=0, \tag{37}$$

这一步请特别注意$y(x)$是关于x的函数而不是单纯的一个变量y。由此解得

$$y'(x)=\frac{y(x)+x-1}{y(x)-x}. \tag{38}$$

我们指出，得到的隐函数导数(38)仍然包含没有显式表达式的部分$y(x)$，这是无法避免的。有时也可以略去y对x的依赖写为

$$y'=\frac{y+x-1}{y-x}. \tag{39}$$

如果想对隐函数求二阶导数，只需要以式(38)为基础将y看作关于x的函数$y=y(x)$用复合函数求导公式计算才可以。

1.3 高阶导数的计算方法

高阶导数的计算是一个非常复杂的问题，这里的高阶导数通常指要求计算某函数n阶导数或n阶导数函数值的问题，其中n可以是一切自然数。我们将在本节着重介绍各种技巧，不过仍有一些题目需要见招拆招。

高阶导数显然具有下述加减运算公式

$$(af+bg)^{(n)}=af^{(n)}+bg^{(n)},\ a,b\in\mathbb{R}. \tag{40}$$

乘法运算函数的高阶导数则遵循下述莱布尼茨公式

定理 1.3. 设$f(x)$和$g(x)$在(a,b)存在n阶导数，那么$h(x)=f(x)g(x)$在(a,b)存在n阶导数，并且

$$h^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x). \tag{41}$$

上述运算法则是计算高阶导数的理论基础。

公式法

部分比较常见的函数，可以直接计算其n阶导数，我们总结如下

$$\begin{aligned}
(\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right), &(42)\\
(\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right), &(43)\\
\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} &= (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}, &(44)\\
(\ln(1+x))^{(n)} &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, &(45)\\
(\mathrm{e}^x)^{(n)} &= \mathrm{e}^x. &(46)
\end{aligned}$$

我们可将一些形式简单函数写成式(42)-(46)中函数加减乘的形式，通过导数加减性质和Leibniz公式计算其n阶导数。下面看一例题：

例 5. 设$f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$，求$f^{(n)}(x)$，其中$n\in\mathbb{N}^*$。

Proof. 经过代数变形

$$f(x)=\frac{2x}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}. \tag{47}$$

根据式(44)得到

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} &= (-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}},\\
\left(\frac{1}{-1+x}\right)^{(n)} &= (-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

这里我们不直接对$\frac{1}{1-x}$求导而选择对$\frac{1}{x-1}$求导，是为了避免$-x$对导数的影响。因此

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}n!\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right). \tag{48}$$

□

处理这类公式法问题时，主要的目标是把被求导函数拆解为我们可以直接计算n阶导的函数。

找规律和数学归纳法

对于一些很复杂的函数不能用公式处理，我们可以列举函数的各阶导数总结规律，然后使用数学归纳法计算其n阶导数。这类方法适用面很广，我们看下例：

例 6. 设$f(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，求$f^{(n)}(x)$，其中$n\in\mathbb{N}^*$。

Proof. 当$n=1$时有$\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$。当$n=2$时有$\left(x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)''=\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$。当$n=3$时有$\left(x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)'''=-\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$。我们希望证明

$$\left(x^n\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}. \tag{49}$$

我们用数学归纳法。式(49)显然对$n=1$成立。假如式(49)对$n=k$成立，即

$$\left(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}=\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}. \tag{50}$$

我们想计算$\left(x^{k+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)}$。由于归纳假设设计的函数是$x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，与我们要计算的$x^{k+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$的高阶导数函数不一致，所以我们使用Leibniz公式计算

$$\begin{aligned}\left(x^{k+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} &= \left(x\cdot x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}\\ &= x\cdot\left(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}+k\cdot\left(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k-1)}\\ &= \frac{(-1)^k}{x^k}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+k\cdot\left(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k-1)}.\end{aligned} \tag{51}$$

再对左右两端求导数

$$\begin{aligned}\left(x^{k+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)} &= (-1)^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-k}{x^{k+1}}-\frac{1}{x^{k+2}}\right)+k\cdot\left(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}\\ &= (-1)^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-k}{x^{k+1}}-\frac{1}{x^{k+2}}\right)+\frac{k(-1)^k}{x^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.\end{aligned} \tag{52}$$

由此归纳法成立。 □

化显为隐

化显为隐是一类比较高级的高阶导数计算方法，我们直接看例题来总结规律

例 7. 设$f(x)=\arctan x$，求$f^{(n)}(0)$，其中$n\in\mathbb{N}^*$。

Proof. 我们设$y=\arctan x$，可以计算一阶导数

$$y'(x)=\frac{1}{1+x^2}. \tag{53}$$

移项得

$$(1+x^2)y'(x)=1. \tag{54}$$

式(54)是对一切x均成立的，并且是确定x与y'关系的隐函数。我们对等式(54)的左右两侧连续求n次导数

$$\left((1+x^2)y'\right)^{(n)}=0,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{55}$$

再用Leibniz公式展开

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0,\quad \forall n\geq 2. \tag{56}$$

代入$x=0$得

$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0),\quad \forall n\geq 2. \tag{57}$$

结合$y'(0)=1$和$y''(0)=0$得

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & ,\quad n\text{是偶数},\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & ,\quad n\text{是奇数}.\end{cases} \tag{58}$$

□

我们指出，计算$y=\arctan x$的n阶导数主要难度在于其一阶导数$\frac{1}{1+x^2}$比较难直接用公式法或归纳法计算，因此我们将y'和x的显关系化为隐关系(54)，然后再对式(54)求n阶导数，结合Leinbiz公式计算y的导数之间的迭代关系。我们指出，这一方法能够成立的主要原因是y'和x的隐关系(54)比较简单，使得使用Leibniz公式得到的n阶导数表达式只有三项，如y'和x的隐关系的隐关系比较复杂，则可能需要寻找更高阶导数的隐关系。

此外本例有一种另解。将y'写为$y'=\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}}-\frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$，其中i是虚数单位，然后用公式法求解。

2 扩展延伸

2.1 扩展题概览

扩展延伸题部分难度较大，建议根据题目内容选择性阅读。

- 扩展习题1：中等难度，病态函数的构造和理解。
- 扩展习题2：简单难度，绝对值函数和分段函数的导数计算。
- 扩展习题3：中等难度，导数定义综合题，函数极限计算较复杂。

- 扩展习题4：困难难度，化显为隐计算高阶导数。
- 扩展习题4：困难难度，数学归纳法计算高阶导数。
- 扩展补充题1：简单难度，各类导数计算题，强调计算准确率。
- 扩展补充题2：简单难度，导数定义和理解。
- 扩展补充题3：中等难度，利用三类方法计算高阶导数。
- 扩展补充题4：困难难度，导数定义证明题。
- 扩展补充题5：困难难度，导数定义证明题。

2.2 扩展习题

题 1. 判断符合以下要求的函数是否存在，并说明理由
1.在全体实数定义的函数，其仅在一点一阶可导，其余点均不连续。
2.在全体实数定义的函数，其仅在一点二阶可导，其余点均不连续。

分析：本题旨在通过病态函数的构造加深对导数和二阶导数的定义的理解。

Proof. **1.**存在，构造函数$f(x)=x^2D(x)$，其中$D(x)$是Dirichlet函数。那么根据上一章讲义的分析可知$f(x)$在$x\neq 0$均不连续，下面证明$f(x)$在$x=0$可导

$$f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2D(x)-0}{x}=\lim_{x\to 0}xD(x)=0. \tag{59}$$

所以$f(x)$仅在$x=0$一点可导，其余点不连续。

2.不存在。二阶导数的定义是

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{60}$$

换言之，如果$f''(a)$存在，那么一阶导数$f'(x)$应至少在a的一个邻域$U_r(a)$有定义，而不能仅在$x=a$一点有定义。由此，$f(x)$必须在邻域$U_r(a)$可导，进一步$f(x)$在邻域$U_r(a)$连续。由此可见，如果$f(x)$在$x=a$二阶可导，就必须在某邻域$U_r(a)$连续，由此不存在在一点二阶可导，在其他点均不连续的函数。

□

题 2. 计算题
1.设$f(x)=|\ln|x||$，求$f'(x)$。
2.在$[0,1]$上定义两个分段函数

$$g_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{2n}}, & x=\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}^*,\\ 0, & \text{其他点},\end{cases} \quad \text{和}\ g_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n+1}}, & x=\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}^*,\\ 0, & \text{其他点}.\end{cases} \tag{61}$$

问$g_1(x)$和$g_2(x)$在$x=0$是否右可导？

分析：本题主要考虑绝对值求导和分段函数求导。绝对值求导的问题需格外注意定义域，并分段拆解绝对值研究。

Proof. **1.**首先$f(x)$的定义域是$x\neq 0$。我们需要根据绝对值的符号分类。

我们注意到$x=\pm 1$时$\ln|x|=1$，因此我们以± 1和0分成三段：

$$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>1,\\ -\ln x, & 0<x<1,\\ -\ln(-x), & -1<x<0,\\ \ln(-x), & x<-1.\end{cases}\tag{62}$$

计算导数

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>1,\\ -\frac{1}{x}, & 0<x<1,\\ \frac{1}{x}, & -1<x<0,\\ -\frac{1}{x}, & x<-1.\end{cases}\tag{63}$$

当$x=\pm 1$时，我们分别计算左右导数。由于

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln x-0}{x-1}=\lim_{y\to 0+0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1,\tag{64}$$

这里用换元$y+1=x$。另一方面

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{-\ln x-0}{x-1}=-\lim_{y\to 0-0}\frac{\ln(1+y)}{y}=-1.\tag{65}$$

由此$f(x)$在$x=1$不可导。同理$f(x)$在$x=-1$也不可导。

2.我们首先计算

$$\frac{g_1(x)-g_1(0)}{x}=\begin{cases}\frac{1}{2^n}, & x=\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}^*,\\ 0, & \text{其他点},\end{cases}\tag{66}$$

由此

$$\left|\frac{g_1(x)-g_1(0)}{x}\right|\leq x,\tag{67}$$

取$x\to 0+0$得

$$g'_{1+}(0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{g_1(x)-g_1(0)}{x}=0.\tag{68}$$

另一方面，我们计算

$$\frac{g_2(x)-g_2(0)}{x}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}^*,\\ 0, & \text{其他点},\end{cases}\tag{69}$$

为了证明$\lim_{x\to 0+0}\frac{g_2(x)-g_2(0)}{x}$发散，取收敛于0的序列$x_n=\frac{1}{2^n}$和$y_n=\frac{1}{3^n}$，代入

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_2(x_n)-g_2(0)}{x_n}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{g_2(y_n)-g_2(0)}{y_n}=0. \tag{70}$$

由此函数极限$\lim_{x\to 0+0}\frac{g_2(x)-g_2(0)}{x}$发散。 □

题 3. 求参数a,b,c使得$f(x)$在全体实数上可导，其中

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x|<1 \\ ax^4-bx^2+c. & |x|\geq 1 \end{cases} \tag{71}$$

分析：由于$f(x)$是分段函数，我们只需取a,b,c使得$f(x)$在端点±1连续且可导即可，这需要保证左右导数的值相等。

Proof. 由于本题的函数是偶函数，我们仅在$x=1$处讨论$f(x)$的连续性和可导性。

首先为了$f(x)$在$\mathbb{R}$可导，首先$f(x)$必须在$x=1$连续，即

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}\right)=0 \tag{72}$$

由此我们得到关系式

$$a-b+c=0. \tag{73}$$

由于$f(1)=0$，计算左导数

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x\to 1-0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}-0}{x-1} \\ &= \lim_{y\to+\infty}-y\mathrm{e}^{\frac{y^2}{1-2y}}\ \text{（换元}y=-\frac{1}{x-1}\text{）} \\ &= -\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2y-1}}}. \end{aligned} \tag{74}$$

当$y\to+\infty$时显然有$\frac{y^2}{2y-1}\to+\infty$，因此$\lim_{y\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2y-1}}=+\infty$，极限(74)是$\frac{\infty}{\infty}$型不定式。相较而言由于指数项量级更大，为了说明清楚我们利用

$$\frac{y^2}{2y-1}\geq\frac{y}{2},\ y>0, \tag{75}$$

由此

$$0<\left|\frac{y}{\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2y-1}}}\right|\leq\frac{y}{(\sqrt{\mathrm{e}})^y}, \tag{76}$$

由于$\sqrt{\mathrm{e}}>1$，所以

$$f'_-(1)=-\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2y-1}}}=0. \tag{77}$$

另一方面，我们可以计算出$f'_+(1)=0$，根据$f'(1-0)=f'(1+0)$得到

$$4a-2b=0, \tag{78}$$

结合(73)和(78)得到只要a,b,c满足$a:b:c=2:1:-1$即可。

我们指出函数极限$\lim_{x\to 1-0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}-0}{x-1}$是$\frac{0}{0}$的不定式极限，这一极限的计算难度非常大，且等价无穷小方法难以使用。我们的思路是使用换元$y=-\frac{1}{x-1}$的目的是将极限从$\frac{0}{0}$不定式化作$\frac{\infty}{\infty}$不定式，采用量级估计的方法。 □

题 4. *2020高等数学B期中考试题*. 设$f(x)=(\arcsin x)^2$，求$f^{(n)}(0)$，其中$n\in\mathbb{N}^*$。

分析：本题采用化显为隐的办法，但是寻找可以使用莱布尼茨公式的隐式的过程是比较复杂的。

Proof. 设$y=(\arcsin x)^2$，进行一次求导得

$$y'=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{\frac{y}{1-x^2}}. \tag{79}$$

对上式左右平方

$$(y')^2(1-x^2)=4y. \tag{80}$$

式(80)虽然是关于x,y,y'的隐式，但是项$(y')^2$的存在使得我们不能直接对式(80)用莱布尼茨公式计算高阶导。为此我们再求一次导数

$$2y'y''(1-x^2)-2x(y')^2=4y'. \tag{81}$$

消去项y'就可以得到关于x,y',y''的隐式

$$y''(1-x^2)-xy'=4. \tag{82}$$

我们在式(82)两侧用莱布尼茨公式计算n阶导数

$$y^{(n+2)}(1-x^2)-2nxy^{(n-1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0,\quad \forall n\geq 2. \tag{83}$$

代入$x=0$得

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0). \tag{84}$$

结合$y'(0)=0$和$y''(0)=2$得

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}[(n-2)!!]^2 & ,\quad n\text{是偶数},\\ 0 & ,\quad n\text{是奇数},\end{cases} \tag{85}$$

其中$n!!$是双阶乘，当n是偶数时，$n!!=n\cdot(n-2)\cdots 2$。 □

题 5. 考虑分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases} \tag{86}$$

求高阶导数$f^{(2021)}(0)$。

分析：通过直接找规律的办法，不难猜测$f^{(n)}(0)=0$对一切$n\in\mathbb{N}^*$成立，但是如何利用数学归纳法将这一问题说清楚是较难的。我们注意到$f(x)$在0处的定义是单独补充的，因此对于每一个高阶导数$f^{(n)}(x)$，其在0处都是补充定义为0，在计算$f^{(n+1)}(0)$时则需要计算极限$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}f^{(n)}(x)$。由此我们直接对高阶导数$f^{(n)}(x)$在$x\neq 0$的表达式进行归纳。不过本题选择的归纳命题并不是归纳$f^{(n)}(x)$的具体形式，而是归纳$f^{(n)}(x)$是$\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$乘以一个关于$\frac{1}{x}$的多项式。

Proof. 我们希望证明$f^{(n)}(0)=0$对一切$n\in\mathbb{N}^*$成立。

如果$x\neq 0$，我们考虑高阶导数$f^{(n)}(x)$表达式。不难验算$f'(x)=\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$，$f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}-\frac{4}{x^6}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$以及$f''(x)=\left(\frac{24}{x^5}+\frac{36}{x^7}+\frac{8}{x^9}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$。我们归纳证明，对任意$n\in\mathbb{N}$，如果$x\neq 0$，我们可以将$f^{(n)}(x)$写成如下形式

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \tag{87}$$

其中P_n是一个多项式。

当$n=0$时，$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$，因此多项式$P_0=1$。我们假定$n=k$时可以将$f^{(k)}(x)$写成式(87)形式，即

$$f^{(k)}(x)=P_k\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}. \tag{88}$$

我们继续计算导数$f^{(k+1)}(x)$得

$$f^{(k+1)}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\left[-\frac{2}{x^3}P_k\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\right]. \tag{89}$$

考虑到P_k及其导数P_k'仍然是多项式，那么

$$P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x^3}P_k\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}P_k'\left(\frac{1}{x}\right), \tag{90}$$

也是关于$\frac{1}{x}$的多项式。由此当$x\neq 0$，可以将$f^{(k)}(x)$写成式(87)形式。

借助$f^{(n)}(x)$在$x\neq 0$的表达式，我们可以计算$f^{(n+1)}(0)$，利用归纳法，我们仍然假设$f^{(n)}(0)=0$。于是

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{yP_k(y)}{\mathrm{e}^{y^2}}, \tag{91}$$

第二个等号利用了函数极限换元$y=\frac{1}{x}$。由于$yP_k(y)$是关于y的多项式，其量级是比指数型无穷大量e^{y^2}小的，所以

$$\lim_{y\to\infty}\frac{yP_k(y)}{\mathrm{e}^{y^2}}=0. \tag{92}$$

一般地，$f^{(2021)}(0)=0$。 □

2.3 扩展补充题

本次补充题类型较多，根据需求掌握部分即可。前三道题是比较基本的题目，后两道题是很有难度的证明题。

补 1. 计算题

*1.*设$f(x)=x^{x^x}$，求$f'(x)$。

*2.*设$f(x)=2\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)-\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$，求$f'(x)$。

*3.*定义$g(x)=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$，其中$f(x)$可导且$f'(x)=\arctan x$，求$g'(x)$。

*4.*设隐函数$y=y(x)$由$x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$，其中$x>0$，求$y'(x)$。

补 2. 设$f(x)$是在$x=0$的某个邻域定义的函数，回答下列问题：

*1.*如果$f'(0)$存在，证明$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(0)$。

*2.*如果极限$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(-\Delta x)}{2\Delta x}$存在，能否说明$f'(0)$存在？

补 3. 计算n阶导数，其中$n\in\mathbb{N}^*$

1.$f(x)=\sin^3 x$。

2.$f(x)=\frac{x^n}{1-x}$。

3.$f(x)=x^{n-1}\ln x$。

补 4. 设$f(x)$是在$\mathbb{R}$定义的函数，且$f'(0)$存在，回答下列问题：

*1.*如果正序列$\{x_n\}$和负序列$\{y_n\}$均收敛于*0*，证明$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(0)$。

*2.*如果两个正序列$\{x_n\}$和$\{z_n\}$均收敛于*0*，问$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=f'(0)$是否总成立？

补 5. 设$f(x)$是在$[-1,1]$定义的函数，且$f'(0)$存在，回答下列问题

*1.*证明：$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)-nf(0)\right]=\frac{f'(0)}{2}$.

*2.*利用上一问的结论计算极限$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.