多元函数微分学讲义

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后修改时间：2022.12

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。

1 知识点理解

本章的主要研究对象是多元函数，我们以二元函数为例讨论，三维函数的情况与二维基本相同。本章的目的是将前五章学的一元函数的极限、连续、导数、微分、泰勒公式和中值定理等理论推广到多元函数，因此学习时需要同学们将多元函数情形与一元函数情形对应，着重理解其异同。

首先我们来1探讨二元函数的定义，对于给定的二元函数$f(x,y)$我们有下述两种理解方式

1.独立自变量 将x,y看作两个独立的自变量，此时如果固定其中一个自变量（例如y），那么$f(x,y)$是关于x的一个一元函数。

2.点自变量 将二元函数$f(x,y)$看作以二维空间$\mathbb{R}^2$上的点(x,y)为自变量的函数，二元函数的许多定义都引入这种视角。

例如在一元函数理论中，导数和微分是无穷一致的概念；在二元函数理论中，导数和微分则是在"独立自变量"视角和"点自变量"视角下分别引入的"求导"概念。一般来说，以独立自变量视角考察二元函数只能得到函数单个自变量方向的信息（即"局部信息"），因此点视角包含的信息比独立自变量视角更多（即"全局信息"）。

1.1 二元函数的极限和连续

按照学习一元微分学的步骤，我们首先学习二元极限的定义，并建立二元函数的连续性理论。二元极限的计算方法是二元微分学一切内容的基础。在在"独立自变量"视角和"点自变量"视角都可以定义二元函数的极限，我们常说的二元极限是以"点自变量"视角定义的（也称全面极限），而通过"独立自变量"视角定义的二元函数极限称为累次极限，后续我们会讨论。

二元函数极限的定义和理解

目标有两个：理解二元极限的定义、以二元极限为例体会一元函数和二元函数的分析方法之不同。一元函数极限$\lim_{x\to x_0} u(x)$为A，其实质是自变量x充分接近点x_0时，函数值$f(x)$也靠近A，即对函数值“聚拢”的刻画。二元函数的极限定义类似，只是叙述上需要考虑二元函数的定义域是平面上的点而不是一个数：当点自变量(x,y)充分接近给定点(x_0,y_0)时，函数值$f(x,y)$靠近A。但是在刻画点(x,y)接近(x_0,y_0)时，需要强调一元函数和二元函数的区别：

定义 1.1. 设$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的定义域是某空心邻域

$$U_r^0[(x_0,y_0),r]=\left\{(x,y):0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\right\}, \tag{1}$$

称$f(x,y)$在点(x_0,y_0)收敛于极限A，如果对于$\forall\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，只要自变量(x,y)满足$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$就有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A, \text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A. \tag{2}$$

我们指出，二元极限的$\varepsilon-\delta$定义的“轮廓”与一元极限是非常类似的，不同点在我们刻画点(x,y)向(x_0,y_0)靠拢时，我们使用勾股定理定义了点(x,y)和点(x_0,y_0)的距离：

$$|(x,y)-(x_0,y_0)|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}. \tag{3}$$

由于数轴上点的距离用绝对值刻画，我们用符号$|\cdot|$记平面点间的距离。在此我们也可以看到，二元极限的定义始终使用了“点自变量”视角。

对于一元函数极限$\lim_{x\to x_0} f(x)$，极限收敛必需左极限与右极限不相等，即我们将点x从x_0的左侧或右侧接近x_0时，$f(x)$的极限必需相等。对于多元函数的极限，由于考虑对象是平面上的点，当我们使点(x,y)靠近点(x_0,y_0)时，接近的方式可以是从左接近（令$y=y_0$而$x\to x_0-0$），也可以是从上接近（令$x=x_0$而$y\to y_0+0$），甚至还可以是斜向接近（考虑过点(x_0,y_0)斜率为1的直线$y=x-x_0+y_0$，沿着这条斜线接近(x_0,y_0)）。**要想保证二元极限$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$收敛，就必须使得点$(x,y)$由各个方向接近点$(x_0,y_0)$时得到的“单侧极限”都收敛**。因此，二元极限的收敛比起一元极限情形，条件要求更苛刻些。

计算极限一般不通过极限的定义，而是有专门的求解技巧，二元极限也不例外。二元极限问题的特殊之处在于，证明二元极限的收敛和发散的方法完全不同，所以我们必须首先判断我们要分析的极限是收敛还是发散，然后再选择对应的做法来计算极限值或证明极限发散。我们首先分为极限收敛和发散两种情形来介绍解题方法。

收敛二元极限的计算技巧

对于收敛的极限，处理方法大致有两种：**夹逼原理和整体分析法**，通常也要极限**极坐标换元技巧**：

1.夹逼原理的做法是，如果我们想证明$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$，就设法对$|f(x,y) - A|$进行放缩：

$$0 \le |f(x,y) - A| \le r(x,y), \tag{4}$$

这里$r(x,y)$是形式简单的函数，如果$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} r(x,y) = 0$，就说明$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$。因此夹逼原理需要我们首先猜测极限$A$，再对绝对值项$|f(x,y) - A|$放缩估计。在实际应用中，大多数夹逼法完成的题目极限A是0，因此放缩$|f(x,y) - A| = |f(x,y)|$并不难。

2.整体分析法则通常利用极限的特定形式，将二元极限转化为一元极限来处理，或是利用一元极限中的技巧，如等价无穷小方法。

3.部分题目需要借助极坐标换元的方法，极坐标换元值

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad r \in [0,+\infty),\, \theta \in [0,2\pi). \tag{5}$$

在此情况下我们可以化简极限：例如考虑$(x,y) \to (0,0)$的二元极限，就相当于我们只需考虑$r \to 0+0$即可。在下面的例题中，我们会将极坐标换元法结合在前两种方法里。

例 1. 计算下列二元极限的值

1.$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x + \sin y)\cos\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right)$

2.$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x| + |y|)^{|x|+|y|}$

3.$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$

Proof. **1.**我们用夹逼原理这一极限收敛于0，考虑如下放缩

$$\left|(x+\sin y)\cos\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right) - 0\right| = \left|(x+\sin y)\cos\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right)\right| \le |x + \sin y|. \tag{6}$$

当$(x,y) \to (0,0)$时，函数x和$\sin y$极限都是0，显所以$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x + \sin y| = 0$，由此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+\sin y)\cos\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right) = 0. \tag{7}$$

2.我们换元$z = |x| + |y|$，当$(x,y) \to (0,0)$时显然有$z \to 0+0$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|)^{|x|+|y|} = \lim_{z\to 0+0} z^z = 1, \tag{8}$$

其中一元极限$\lim_{z\to 0+0} z^z$用洛必达法则不难计算。

3.首先对分子中的x^3+y^3做整体分析：当$(x,y)\to(0,0)$有$x^3+y^3\to 0$，所以根据一元函数的等价无穷小理论

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3}=1, \tag{9}$$

因此我们对本题的极限整体代换

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\times\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3}\right]=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}. \tag{10}$$

下面利用夹逼原理证明$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$，用极坐标换元(5)代入得到

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=|r(\sin^3\theta+\cos^3\theta)|\le 2|r|. \tag{11}$$

在极坐标意义下$(x,y)\to(0,0)$时的极限相当于$r\to 0+0$，由此$2|r|\to 0$，所以证明了$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$。

如不使用极坐标方法也可以完成放缩从而证明$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$，放缩的过程技巧性更强：

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| &= \left|x\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)+y\cdot\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\right| \\ &\le |x|\cdot\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|+|y|\cdot\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|,\end{aligned} \tag{12}$$

其中第二个不等号利用了绝对值的三角不等式。由于$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|,\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|\in[0,1]$，所以

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\le|x|+|y|, \tag{13}$$

而$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|+|y|=0$，所以$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$。 $\square$

二元极限发散的判定

下面我们讨论二元极限发散的证明，其方法是**多路径接近法**。对于一元极限，如果左右极限不相等，就说明极限发散。推广到二元极限$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$，我们可以使得点$(x,y)$从不同路径向$(x_0,y_0)$接近的过程，每一种接近的过程会得到一个一元极限。我们以接近原点$(0,0)$为例分析：

1.水平接近 令$y=0$而$x\to 0$，这种情况下(x,y)沿着x轴接近原点。

2.竖直接近 令$x=0$而$y\to 0$，这种情况下(x,y)沿着y轴接近原点。

3.斜向接近 直线$y=kx$是穿过原点斜率为k的直线，令$y=kx$而$x\to 0$，这种情况下(x,y)沿着直线$y=kx$接近原点。

一般来说，上述三种接近方式是足够的。如果存在两种接近方式得到的一元极限收敛到的值不同，或是某一接近方式得到的一元极限发散，就说明二元极限不存在。

例 2. 证明下列二元极限发散：
1.$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$。
2.$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$。

Proof. **1.**首先考虑(x,y)水平接近$(0,0)$，令$y=0$而$x\to 0$得到一元极限

$$I_1=\lim_{x\to 0}\frac{x^4-0^2}{x^4+0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1, \tag{14}$$

再考虑(x,y)竖直接近$(0,0)$，令$x=0$而$y\to 0$得到一元极限

$$I_2=\lim_{y\to 0}\frac{0^4-y^2}{0^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1, \tag{15}$$

由于$I_1\neq I_2$，因此$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$发散。

2.首先考虑(x,y)水平接近$(0,0)$，令$y=0$而$x\to 0$得到一元极限

$$I_1=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0, \tag{16}$$

再考虑(x,y)沿$y=x$接近$(0,0)$，令$x=y$而$x\to 0$得到一元极限

$$I_2=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}, \tag{17}$$

由于$I_1\neq I_2$，因此$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$发散。 □

累次极限

之前我们给出的二元极限也称为全面极限，全面极限采用二元函数的“点自变量”视角，考虑点(x,y)充分接近点(x_0,y_0)时函数值$f(x,y)$的性态。我们介绍另外一种极限的定义方式：**累次极限**，函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的累次极限有两种：先固定自变量y对x取极限，再对y取极限：

$$A=\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0}f(x,y)\right]. \tag{18}$$

这里相当于我们先得到一个函数$A(y)=\lim_{x\to x_0}f(x,y)$其中$y\neq y_0$，然后累次极限等于一元函数的极限$A=\lim_{y\to y_0}A(y)$；先固定自变量$x$对$y$取极限，再对$x$取极限：

$$B=\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0}f(x,y)\right]. \tag{19}$$

这里相当于我们先得到一个函数$B(x)=\lim_{y\to y_0}f(x,y)$其中$x\neq x_0$，然后累次极限等于一元函数的极限$B=\lim_{x\to x_0}B(x)$

与全面极限不同，累次极限是二元函数“独立自变量”视角下的极限概念。同样是使得(x,y)接近(x_0,y_0)，累次极限先让x接近x_0而后使y接近y_0，存在自变量的先后顺

序，全面极限则让(x,y)作为平面上的点接近点(x_0,y_0)。由于视角的不同，**累次极限和全面极限的存在或值没有任何联系**。累次极限存在可能全面极限不存在，全面极限存在可能累次积分不存在。因此计算累次极限问题，我们必须将累次极限的运算看作两次一元极限计算来求解。

下面例题中的函数是分段定义的，这类函数的极限问题是考试的常考点：

例 3. 计算$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$在$(0,0)$的全面极限和累次极限。

Proof. 先计算全面极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)}=0$，对函数进行放缩：

$$\left|x\sin\frac{1}{y}\right|\leq |x|, \tag{20}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时$|x|\to 0$，所以用夹逼原理$\lim_{(x,y)\to(0,0)}=0$。

再计算累次极限，首先是"先x后y"的极限。固定$y\neq 0$为参数对x取极限

$$A(y)=\lim_{x\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{y}=0. \tag{21}$$

然后计算一元极限

$$A=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}A(y)=\lim_{y\to 0}0=0. \tag{22}$$

接着是"先y后x"的极限，固定$x\neq 0$为参数对y取极限

$$B(x)=\lim_{y\to 0}x\sin\frac{1}{y}\text{ 发散}. \tag{23}$$

所以累次极限$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)$不存在。 □

多元函数单点连续性的定义

利用全面极限可以定义二元函数的单点连续性：

定义 1.2. 设$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的定义域包含某实心邻域

$$U_r[(x_0,y_0),r]=\left\{(x,y):\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\right\}, \tag{24}$$

称$f(x,y)$在点(x_0,y_0)**连续**，如果下述极限成立

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0). \tag{25}$$

因此当我们要证明二元函数的连续时，需要证明的其实是二元极限(25)。另一方面，二元函数的连续性也有类似一元函数的许多性质，其中最重要的四则运算连续性：

如果二元函数$f(x,y)$和$g(x,y)$在点(x_0,y_0)连续，那么

1.函数$f(x,y)\pm g(x,y)$在(x_0,y_0)连续。

2.函数$f(x,y)\cdot g(x,y)$在(x_0,y_0)连续。

3.如果$g(x_0,y_0)\neq 0$，那么函数$\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$在(x_0,y_0)连续。

利用四则运算性质可以分析大多数简单的函数的连续性，一些复杂的分段函数的连续性需要我们在特定点回到极限(25)讨论。

例 4. 设$u(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，问$u$在$\mathbb{R}^2$各个点是否单点连续？

Proof. 对于$(0,0)$以外的点(x_0,y_0)，显然xy和x^2+y^2在点(x_0,y_0)连续，所以$u(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$在点$(x_0,y_0)$连续。

$u(x,y)$在点$(0,0)$是分段定义，要讨论u在点$(0,0)$连续性实质是讨论下述极限是否成立

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=u(0,0). \tag{26}$$

根据例题2的结论$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$发散，因此$u(x,y)$在点$(0,0)$不连续。 □

*闭区域连续函数的性质

这一部分的内容比较抽象，请读者选择阅读。首先我们需要明确$\mathbb{R}^2$集合的一些概念。以单位圆$x^2+y^2\leq 1$为例，我们可以看到单位圆的边界是圆周$x^2+y^2=1$，除去圆周以外的点$x^2+y^2<1$是单位圆的内点。在数学上，我们称$x^2+y^2<1$这样不包含边界的集合为**开集**，称$x^2+y^2\leq 1$这样包含边界的集合为**闭集**。开集$x^2+y^2<1$添加边界圆周$x^2+y^2=1$可以得到闭集$x^2+y^2\leq 1$，因此闭集$x^2+y^2\leq 1$称为开集$x^2+y^2<1$的**闭包**。此外，单位圆$x^2+y^2\leq 1$是**连通**的集合，而考虑两个圆的并集$\{x^2+y^2\leq 1\}\cup\{x^2+(y-3)^2\leq 1\}$就是不连通的集合。连通的开集称为**区域**，连通的闭集称为**闭区域**。

开集、闭集、边界、连通、区域都是点集拓扑学的重要概念，课本上给出了这些概念在欧式空间的严格定义。我们这里只要求读者形象地理解使用这些概念。如果将$\mathbb{R}$和$\mathbb{R}^2$联系起来，我们很容易看到$\mathbb{R}$中的有限闭区间对应$\mathbb{R}^2$的有界闭区域，我们希望在$\mathbb{R}^2$的有界闭区域上建立连续函数的性质。首先，如果D是有界闭区域，定义在D每一点单点连续的二元函数$f(x,y)$在闭区域D连续。这一定义逻辑上实际有瑕疵，因为在D的边界上函数的连续性无法良好定义，因此二元函数在闭区域的连续性是借助更深刻的方式定义，而不是逐点定义。我们这里就借用逐点定义的方式简单说明。和一元情形类似，我们可以给出D上连续函数的下述性质：

1.有界性 存在下界m和上界M满足$m \le f(x,y) \le M$对一切$(x,y) \in D$成立。
2.最值可达 设m_0和M_0是$f(x,y)$在D的最小值和最大值，那么存在$P, Q \in D$取到最值，即$f(P) = m_0$和$f(Q) = M_0$。
3.介值性 设$M, N \in D$满足$f(M) = a$和$f(N) = b$，则对任意c介于a和b之间，存在线段MN的点K使得$f(K) = c$。

1.2 偏导数和全微分

偏导数和全微分是二元函数微分学的核心概念。偏导数是二元函数“独立自变量”视角下求导的定义，全微分（简称“微分”）是二元函数“点视角”下求导的定义；偏导数只包含了水平和竖直单个方向的局部的导数信息，而全微分包含了更多的来自函数各个方向的导数信息。

偏导数

从“独立自变量”视角看二元函数$f(x,y)$，如果固定自变量y的值那么$f(x,y)$看作只关于x的一元函数，我们将此时关于x的一元函数导数定义为$f(x,y)$关于自变量x的**偏导数**$\partial_x f$。用二元极限的语言定义是

$$\partial_x f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}. \tag{27}$$

关于自变量y的偏导数

$$\partial_y f(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}. \tag{28}$$

关于偏导数我们有三点说明：
1.偏导数的符号是很多的，包括$\partial_x f, \frac{\partial f}{\partial x}, f'_x$等都表示$f(x,y)$关于自变量$x$的偏导数。
2.虽然偏导数$\partial_x f$固定了一个自变量y对另一个自变量x求导，但是得到的函数$\partial_x f$依然是依赖x, y两个自变量的二元函数。这里我们就可以看到计算偏导数$\partial_x f$的过程中自变量x, y地位不对等。
3.计算偏导数$\partial_x f$在某点(x_0, y_0)的函数值$\partial_x f(x_0, y_0)$时，我们既可以直接计算出偏导数$\partial_x f(x,y)$表达式然后代入$(x,y) = (x_0, y_0)$，也可以首先代入$y = y_0$然后对一元函数$g(x) = f(x, y_0)$求导得到$g'(x_0) = \partial_x f(x_0, y_0)$。两者并无区别，使用习惯的方法即可。

偏导数的计算问题核心是搞清楚哪个变量是要求导的变量，哪个变量是固定的变量。一般来说，利用第二章学过的求导公式就可以计算偏导数。一些比较复杂的函数，如分段函数，则可能需要使用偏导数的二元极限定义计算偏导数，详见下面两个例题：

例 5. 计算下列偏导数

1.三元函数$g(x,y,z)=\left(\frac{2y}{z}\right)^x$的偏导数在$(1,2,1)$处的函数值。

2.二元函数$u(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在$\mathbb{R}^2$各个点的偏导数

Proof. **1.**分别计算关于三个自变量的偏导数：先计算$\partial_x g(x,y,z)$，由于此时自变量y,z是固定的，因此函数$\left(\frac{2y}{z}\right)^x$的底数$\frac{2y}{z}$固定可以看作是指数函数，因此

$$\partial_x\left(\frac{2y}{z}\right)^x=\ln\left(\frac{2y}{z}\right)\left(\frac{2y}{z}\right)^x. \tag{29}$$

代入$(x,y,z)=(1,2,1)$有$\partial_x g(1,2,1)=4\ln 4$；再计算$\partial_y g(x,y,z)$，由于此时自变量$x,z$是固定的，所以函数$\left(\frac{2y}{z}\right)^x$的指数实际是固定的可以看作幂函数，因此

$$\partial_y\left(\frac{2y}{z}\right)^x=x\left(\frac{2y}{z}\right)^{x-1}\partial_y\left(\frac{2y}{z}\right)=\frac{2x}{z}\left(\frac{2y}{z}\right)^{x-1}. \tag{30}$$

代入$(x,y,z)=(1,2,1)$有$\partial_y g(1,2,1)=2$；最后计算$\partial_z g(x,y,z)$，依然使用幂函数求导法

$$\partial_z\left(\frac{2y}{z}\right)^x=x\left(\frac{2y}{z}\right)^{x-1}\partial_z\left(\frac{2y}{z}\right)=-\frac{2xy}{z^2}\left(\frac{2y}{z}\right)^{x-1}. \tag{31}$$

代入$(x,y,z)=(1,2,1)$有$\partial_z g(1,2,1)=-4$。

2.注意到$u(x,y)$在原点$(0,0)$分段定义。当$(x,y)\neq(0,0)$时，我们可以直接使用一元函数求导公式计算偏导数

$$\partial_x u(x,y)=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\ \partial_y u(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \tag{32}$$

当$(x,y)=(0,0)$时，我们使用定义求偏导数

$$\partial_x u(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0. \tag{33}$$

同理$\partial_y u(0,0)=0$。综合上述

$$\partial_x u(x,y)=\begin{cases}\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}\quad \partial_y u(x,y)=\begin{cases}\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases} \tag{34}$$

我们指出，分段函数在特殊点的偏导数是需要使用定义计算的。在计算偏导数$\partial_x u(0,0)$时，我们必须写出定义的式子：

$$\partial_x u(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}, \tag{35}$$

接着我们代入值$f(\Delta x,0)=f(0,0)=0$。上述步骤每一步一定不要省略，否则容易犯错。 □

高阶偏导数

我们注意到偏导数$\partial_x f$也是一个二元函数，因此我们可以讨论$\partial_x f(x,y)$的连续性和$\partial_x f(x,y)$的导数。偏导数$\partial_x f$的导数被称为**二阶偏导数**，记为$\partial_{xx} f$和$\partial_{xy} f$，其中形如$\partial_{xy} f$的对不同自变量分别求一次偏导数得到的二阶偏导数被称为**混合偏导数**。依次类推还可以得到高阶偏导数。计算二阶偏导数需要首先求出一阶偏导数，再对一阶偏导数求偏导数。

混合偏导数有如下重要事实

定理 1.1. $D\in\mathbb{R}^2$是区域，如果$f(x,y)$两个二阶混合偏导数$\partial_{xy} f(x,y)$和$\partial_{yx} f(x,y)$在D连续，那么二阶混合偏导数$\partial_{xy} f(x,y)=\partial_{yx} f(x,y)$在$D$上成立。

对于大多数形式简单的函数，二阶混合偏导数连续并非很难满足的条件，因此我们一般都可以假设二阶偏导数$\partial_{xy} f(x,y)=\partial_{yx} f(x,y)$，这使得我们计算混合偏导数时常常不需要关心求偏导数的顺序。另一方面，对于分段定义的二元函数，混合偏导数有时并不相等，我们来看下面的例题：

例 6. 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$，证明$\partial_{xy} f(0,0)\neq\partial_{yx} f(0,0)$。

Proof. 我们首先计算偏导数$\partial_x f(x,y)$：当$(x,y)\neq(0,0)$时有$f(x,y)=\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}$，固定$y$后可以通过一元导数计算公式得到偏导数

$$\partial_x f(x,y)=y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}. \tag{36}$$

当$(x,y)=(0,0)$时，f的函数值是分段定义的，我们必须使用定义计算偏导数

$$\partial_x f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0. \tag{37}$$

根据对(x,y)是否为$(0,0)$的情形分类，得到偏导数的表达式

$$\partial_x f(x,y)=\begin{cases}y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{38}$$

同理可得

$$\partial_y f(x,y)=\begin{cases}x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{39}$$

然后分别计算$(0,0)$处的混合偏导数

$$\partial_{xy} f(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\partial_x f(0,\Delta y)-\partial_x f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y\cdot\frac{-(\Delta y)^4}{(\Delta y)^4}-0}{\Delta y}=-1 \tag{40}$$

以及

$$\partial_{yx}f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\partial_y f(\Delta x,0)-\partial_y f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\frac{(\Delta x)^4}{(\Delta x)^4}-0}{\Delta x}=1. \tag{41}$$

实际上，我们可以验证$\partial_{xy}f$和$\partial_{yx}f$在点$(0,0)$不连续，所以定理失效。导数需要明确的是，$\partial_{xy}f$和$\partial_{yx}f$不连续并不能推出混合偏导数不相等，证明二阶混合偏导数不相等必须严格从定义推导。 □

全微分的定义

我们指出过偏导数是“独立自变量”视角的概念，因此偏导数只体现$f(x,y)$固定一个自变量时另一自变量的变化率。如果想收集点(x,y)靠近点(x_0,y_0)时$f(x,y)$的整体变化率，仅仅体现单个方向变化的偏导数远远不够。接着我们引入全微分。

回忆一元全微分，给定函数$f(x)$，我们希望在x_0附近将函数值差$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$近似为关于$\Delta x$的线性函数，即存在一个$A$使得

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0, \tag{42}$$

那么称$f(x)$在点x_0处可微，线性函数$A\Delta x$是f在点x_0的微分，记为$\mathrm{d}f=A\mathrm{d}x$，它是对Δf的近似。实际上我们可以证明，$f(x)$在点x_0处可微的充分必要条件是$f(x)$在x_0处可导，并且全微分参数$A=f'(x_0)$，所以全微分也写作$\mathrm{d}f=f'(x_0)\mathrm{d}x$或$f'(x_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$。一元函数的微分和导数是等效的，所以一般不做区分。

在二元函数的全微分框架中，给定二元函数$f(x,y)$我们希望在(x_0,y_0)附近将函数值差$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$设置为关于$\Delta x$和$\Delta y$两个自变量的线性函数，其严格定义如下

定义 1.3. 设$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的定义域包含某实心邻域$U[(x_0,y_0),r]$定义，如果存在实数A,B使得

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\ (\Delta x,\Delta y)\to(0,0), \tag{43}$$

其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处**可微**，二元线性函数$A\Delta x+B\Delta y$为$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$的**全微分**，记为

$$\mathrm{d}f=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y. \tag{44}$$

对于一般的函数而言，直接用定义做全微分的计算是比较复杂的，但是下面的定理刻画了全微分好偏导数的关系：

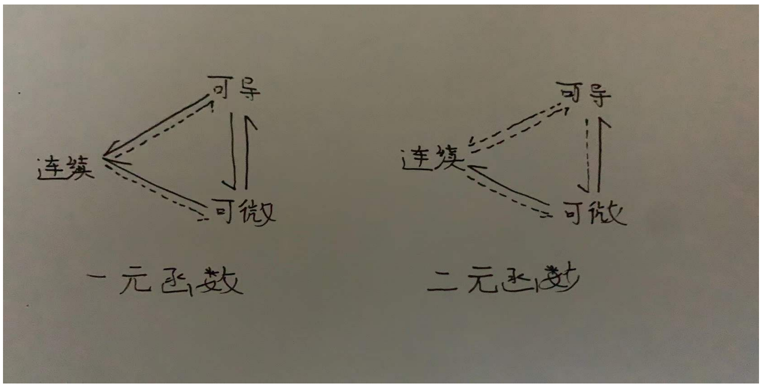

图 1: 图片展示了一元函数的可微、可导、连续三个概念的关系和二元函数的可微、可偏导、连续三个概念的关系。图中的实线箭头代表可以推出，例如一元情形可微可以推出连续；图中的虚线代表无法推出或需要增补其他条件才可以推出，如一元情形连续一般推不出可微。

定理 1.2. 如果$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，那么$f(x,y)$在点(x_0,y_0)两个自变量方向的偏导数存在，并且全微分满足

$$\mathrm{d}f = \partial_x f(x_0,y_0)\mathrm{d}x + \partial_y f(x_0,y_0)\mathrm{d}y. \tag{45}$$

根据上述的定理，如果我们已经确定了函数可微，我们只需要计算两个偏导数就可以得出全微分。我们通过下面的问题来展示：

例 7. 计算全微分（不需要证明可微性）：三元函数$g(x,y,z) = \left(\frac{2y}{z}\right)^x$的在$(1,2,1)$处全微分。

Proof. 之前计算出$\partial_x g(1,2,1) = 4\ln 4, \partial_y g(1,2,1) = 2, \partial_z g(1,2,1) = -4$，根据(45)得

$$\mathrm{d}g = 4\ln 4\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y - 4\mathrm{d}z. \tag{46}$$

□

可微、连续、可偏导的关系

在一元函数的框架下，在一点$x = x_0$可微和可导是等价的概念，而可微/可导可以推出连续，连续推不出可微/可导。下面我们来理清二元函数中可微、可偏导和连续三个概念的关系，参考图1，我们均考虑二元函数$f(x,y)$在一点(x_0,y_0)的单点性质。

首先，在可微、可偏导和连续三个概念中，可微和可偏导是一阶信息，连续是零阶信息。更高阶的信息一般可以推出低阶信息:

定理 1.3. 如果$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，那么$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续。

上面的定理告诉我们可微性可以推出连续性，我们自然不能期望作为零阶信息的连续性可以推出可微性或可偏导。

另一方面，可微和连续是“点自变量”视角的概念，而可偏导是“独立自变量”视角的概念，“点自变量”视角蕴含$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的邻域$U[(x_0,y_0),r]$的全部信息，而“独立自变量”视角一般固定了一个自变量考察另一个自变量变化，即固定$x=x_0$或$y=y_0$的局部信息。显然，“点自变量”视角下的一阶信息可微可以推出“独立自变量”视角下的一阶信息可偏导（如定理1.2），反之“独立自变量”视角下的可偏导推不出“点自变量”视角下的可微，也推不出“点自变量”视角下的零阶信息连续。这里值得注意的是：根据定理1.3我们由可微性可以推出连续性，但是由可偏导（即使是两个方向）都推不出连续性，在例题8中给出了这样的反例。

实际上，如果我们知道$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可偏导，增设一些条件也可以推出$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微：

定理 1.4. 如果$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某个实心邻域$U[(x_0,y_0),\delta]$都存在两个自变量偏导数$\partial_x f$和$\partial_y f$，且两个偏导数均在点(x_0,y_0)处连续，那么$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微。

定理1.4告诉我们，如果想推出$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，不仅需要$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处存在两个偏导数，还需要$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某个实心邻域的每一个点都存在偏导数，此外还需要偏导数连续这一更强的光滑性条件，是非常苛刻的。从定理1.4我们也可以明确看到，为什么我没说作为“点自变量”视角概念的可微是比可偏导强很多的结论。即便如此，我们指出定理1.4只是可微的充分条件，而不是必要条件。

例 8. 设$u(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，$u(x,y)$在点$(0,0)$是否可微，偏导数$\partial_x u$和$\partial_y u$在点$(0,0)$是否连续？

Proof. 例题4告诉我们$u(x,y)$在点$(0,0)$不连续，根据定理1.3有$u(x,y)$在点$(0,0)$不可微。

下面验证偏导数的连续性，需要验证$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\partial_x u(x,y)=\partial_x u(0,0)$是否成立。根据例题5的计算结果，即验证

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}=0. \tag{47}$$

问题转化为一个二元极限问题，我们说明这一极限不存在：用竖直路径接近，取$x=0$而$y\to 0$将上述二元极限转化为一元极限

$$\lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^4}=\infty. \tag{48}$$

由于找到了一个接近方向发散，二元极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$发散，于是$\partial_x u$在点$(0,0)$不连续。同理可推$\partial_y u$在点$(0,0)$都不连续。

本例的函数$u(x,y)$是理解可微、可偏导、连续关系的重要例子：$u(x,y)$在$(0,0)$处并不连续，而不可微，但是其在$(0,0)$两个偏导数都存在，这说明偏导数推不出连续或可微；另一方面，我们看到了偏导数$\partial_x u$和$\partial_y u$虽然在$\mathbb{R}^2$每一个点都存在，但是在点$(0,0)$不连续，不符合定理1.4的要求，所以推不出$u(x,y)$在$(0,0)$可微。 □

可微和不可微的证明

本节我们总结整理通过定义和定理1.2-1.4证明函数可微性/不可微性的各种方法，这些方法在解题中非常重要。

证明$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微性的方法有如下几种：

1.根据定理1.4 证明$f(x,y)$两个偏导数在(x_0,y_0)的实心邻域里存在，且在点(x_0,y_0)连续。定理1.4的条件颇为苛刻，因此不常用。

2.用定义 式(43)是用无穷小量语言给出的，其中根据定理1.2参数A,B必须是两个偏导数。建立在$\partial_x f(x_0,y_0)$和$\partial_y f(x_0,y_0)$存在的基础上，可微性的定义实际要求极限

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)\Delta x-\partial_y f(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0. \tag{49}$$

证明$f(x,y)$在点(x_0,y_0)不可微的方法有如下几种：

1.根据定理1.3 如果$f(x,y)$在点(x_0,y_0)不连续，那么$f(x,y)$在点(x_0,y_0)不可微。

2.根据定理1.2 如果$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的偏导数$\partial_x f(x_0,y_0)$或$\partial_y f(x_0,y_0)$不存在，那么$f(x,y)$在点(x_0,y_0)不可微。

3.用定义 同样将式(43)转化为极限，建立在$\partial_x f(x_0,y_0)$和$\partial_y f(x_0,y_0)$存在的基础上，如果

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)\Delta x-\partial_y f(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}, \tag{50}$$

发散或收敛但是不是0，那么$f(x,y)$在点(x_0,y_0)不可微。

如果要用定义证明可微性，必须首先计算出二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的两个偏导数，代入式(50)中验证极限性质。

例 9. 设$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，计算$\partial_x f(0,0)$和$\partial_y f(0,0)$，由此说明f在点$(0,0)$不可微。

Proof. 本题函数包含绝对值，本质为分段函数，通过定义计算偏导数

$$\partial_x f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0. \tag{51}$$

同理计算得$\partial_x f(0,0)=\partial_y f(0,0)=0$。

接下来我们用反证法的语言说明f在点$(0,0)$不可微。如果假设f在$(0,0)$可微，那么f在点$(0,0)$的微分是$0\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y$，代入微分的定义(43)得

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\Delta x+0\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right). \tag{52}$$

然后化简可得

$$\sqrt{|\Delta x\Delta y|}=o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right). \tag{53}$$

我们接着使用高阶无穷小量的定义

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0. \tag{54}$$

然而根据例题2的结论，极限$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$是发散的，由此推出矛盾。 □

梯度和方向导数

首先给出梯度的定义

定义 1.4. 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的**梯度**，指二维向量

$$\mathrm{grad}f\mid_{(x_0,y_0)}=(\partial_x f(x_0,y_0),\partial_y f(x_0,y_0)). \tag{55}$$

我们指出，梯度的意义是函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)附近**上升最快**方向。如果f可微，那么函数f的变化量满足

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx(\partial_x f(x_0,y_0),\partial_y f(x_0,y_0))\cdot(\Delta x,\Delta y). \tag{56}$$

固定向量$(\Delta x,\Delta y)$的长度，当选择向量$(\Delta x,\Delta y)$平行于梯度向量$\mathrm{grad}f\mid_{(x_0,y_0)}$时，上升量$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$最大。这是因为为了使内积$(\partial_x f(x_0,y_0),\partial_y f(x_0,y_0))\cdot(\Delta x,\Delta y)$最大，需要夹角的余项值最大，即夹角为0度。

偏导数$\partial_x f$研究的是$f(x,y)$在固定一个自变量y时自变量x的导数，相当于研究$f(x,y)$在平行于x轴方向的变化率。我们希望将偏导数的概念延伸到$f(x,y)$在任意斜率直线方向的变化率，就有了**方向导数**的概念：

定义 1.5. 设$\mathbf{n}=(a,b)$是二维平面上的一个单位向量，那么f在(x_0,y_0)处关于$\mathbf{n}$方向的**方向导数**定义为

$$\partial_{\mathbf{n}}f=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+ta,y_0+tb)-f(x_0,y_0)}{t}. \tag{57}$$

必须注意，代表方向导数方向的向量$\mathbf{n}$只允许是单位向量。方向导数的计算可以通过偏导数的内积运算简单得到：

$$\partial_{\mathbf{n}} f=(\partial_x f(x_0,y_0),\partial_y f(x_0,y_0))\cdot\mathbf{n}. \tag{58}$$

例 10. ***2020年高等数学B期末考试题.*** 求函数$f(x,y,z)=\left(\frac{2y}{z}\right)^x$在点$(1,2,1)$下降最快的方向对应的单位向量和方向导数。

Proof. 根据分析，下降最快的方向是负梯度方向，即

$$-\mathrm{grad} f\mid_{(1,2,1)}=(-4\ln 4,-2,4). \tag{59}$$

由于我们要求该方向的单位向量，计算出向量长度$\left|\mathrm{grad} f\mid_{(1,2,1)}\right|=2\sqrt{4\left(\ln 4\right)^2+5}$，所以下降最快方向

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{4\left(\ln 4\right)^2+5}}(-2\ln 2,-1,2). \tag{60}$$

我们计算方向$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{4(\ln 4)^2+5}}(-2\ln 2,-1,2)$的方向导数，根据(58)得

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{n}} f(1,2,1) &= \frac{1}{\sqrt{4\left(\ln 4\right)^2+5}}(-2\ln 2,-1,2)\cdot(4\ln 4,2,-4)\\ &= -2\sqrt{4\left(\ln 4\right)^2+5}.\end{aligned} \tag{61}$$

□

1.3 复合函数的偏导数

对于大多数有显表达式的函数，我们都可以通过一元函数的导数计算公式直接计算其偏导数。而对于没有表达式的函数，我们则需要借助复合函数偏导数的计算公式：链式法则。

链式法则

我们回顾一元函数复合函数求导的链式法则。考虑变量x,y,z满足关系$z=f(y)$和$y=g(x)$，那么函数f和g的导数分别刻画了z关于y的变化率和y关于x的变化率，即$f'(y)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$和$g'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。如果我们想刻画$z$关于$x$的变化率，即复合函数$z=H(x)=f(g(x))$的导函数，就必须将$z$关于与$y$的变化率和$y$关于$x$作用起来：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{62}$$

上述公式称为链式法则，但是我们必须注意：左侧$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$作为$z$关于$x$的变化率。自变量必然是$x$；右侧乘式$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$却以$y$为自变量，这显然是比较奇怪的。实际上为了严格链式法则

的数学化描述，我们写作

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right|_{y=g(x_0)}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\ H'(x)=f'(g(x))g'(x), \tag{63}$$

即链式法则中的$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$实际是$y=g(x)$替换后以$x$为自变量的复合函数。在理解一元函数链式法则(62)时，切忌不要只记住公式，不关心深层次内涵。

我们回归二元函数。设因变量z与自变量u,v有对应关系$z=f(u,v)$，而自变量u,v还与另外的自变量x,y有依赖关系$u=u(x,y)$和$v=v(x,y)$。如果我们关心z对u,v的变化率，那就只需要计算f的偏导数即可。如果我们关心z对x,y的导数，我们就必须将z对u,v的变化率和u,v对x,y的变化率作用起来，得到了一个“虚猲”的二元函数链式法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{64}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{65}$$

上述“链式法则”虽然很简洁，但是我们必须强调偏导数是函数。所以偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$是关于$x,y$的二元函数，所以右侧项的每一项也要写成关于$x,y$的二元函数。因此可以将链式法则(64)-(65)写成带自变量的更完整形式的链式法则：

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y), \tag{66}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \tag{67}$$

接下来我们通过例题来熟悉链式法则：

例 11. 考虑函数$z=f(u,v)$其中$u=\mathrm{e}^x,v=y\sin x$，计算$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

Proof. 利用链式法则计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x,y\sin x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x,y\sin x)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\\&=\mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x,y\sin x)+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x,y\sin x).\end{aligned} \tag{68}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)&=\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x,y\sin x)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x,y\sin x)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\&=\sin x\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x,y\sin x).\end{aligned} \tag{69}$$

□

复合函数二阶导数的计算

如果我们再去求z关于x,y的二阶偏导数，就是对偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$再求一次偏导数。$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$是关于$x,y$的二元函数，形式如(66)-(67)所示，具有复合函数的形式，因此需要我们仍然对式(66)-(67)使用链式法则。不少同学在计算复合函数二阶导数遇到的问题，是无法理解如何对(64)-(65)中形如$\frac{\partial f}{\partial u}$的式子求导。但是我们必须明白，偏导数$\frac{\partial f}{\partial u}$也是函数，带自变量的形式由式(66)-(67)给出。

例 12. 考虑函数$z=f(u,v)$其中$u=\mathrm{e}^x, v=y\sin x$，计算$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

Proof. 我们需要对式(68)再对x求一次偏导数。式(68)中形如$\mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x,y\sin x)$的项，可以看作乘积函数来求导：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)\\
=\ &\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x,y\sin x)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x,y\sin x)\right]\\
=\ &\mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x,y\sin x)+\mathrm{e}^x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x,y\sin x)\right]-y\sin x\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x,y\sin x)\\
&+y\cos x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x,y\sin x)\right]\\
=\ &\mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x,y\sin x)+\mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\mathrm{e}^x,y\sin x)+y\cos x\frac{\partial^2 f}{\partial uv}(\mathrm{e}^x,y\sin x)\right]\\
&-y\sin x\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x,y\sin x)+y\cos x\left[\mathrm{e}^x\frac{\partial^2 f}{\partial vu}(\mathrm{e}^x,y\sin x)+y\cos x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(\mathrm{e}^x,y\sin x)\right]\\
=\ &\mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial u}+\mathrm{e}^{2x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+y\cos x\mathrm{e}^x\frac{\partial^2 f}{\partial uv}-y\sin x\frac{\partial f}{\partial v}+y\cos x\mathrm{e}^x\frac{\partial^2 f}{\partial vu}+y^2\cos^2 x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \quad (70)
\end{aligned}$$

□

1.4 本章考点

下面总结本章经典题型

1.二元极限的分析：包括收敛和发散两种情况的讨论方法。

2.累次极限的计算。

3.二元函数单点连续性的分析：使用公式(25)。

4.偏导数的计算：常规函数使用一元求导法则可得，分段函数则需要在特殊点用定义计算。

5.高阶偏导数的计算：对偏导数继续求偏导数。

6.全微分的计算：计算偏导数然后写成(45)的形式。

7.可微性分析。

8.梯度和方向导数的计算：本质是计算偏导数。

9.复合函数偏导数的计算：应用链式法则。
10.复合函数二阶偏导数的计算：应用链式法则，重在对链式法则的理解，关注式(66)-(67)。

2 扩展延伸

2.1 扩展习题

题 1. 讨论二元极限$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-|x|-|y|}$。

分析：本题同样是极坐标换元的应用，$(x,y)\to(\infty,\infty)$在极坐标意义下就是$r\to+\infty$，与极角θ无关。

Proof. 当$(x,y)\to(+\infty,+\infty)$时，$\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}$是指数级衰减的，因此直观地认为极限应该是0。我们借助极坐标换元说清楚这件事

$$\left|\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}\right|=\left|r^2\mathrm{e}^{-r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}\right|,\tag{71}$$

根据辅助角公式

$$|\cos\theta|+|\sin\theta|\geq 1,\tag{72}$$

因此

$$\left|\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}\right|\leq r^2\mathrm{e}^{-r}.\tag{73}$$

而$\lim_{r\to+\infty}r^2e^{-r}=0$，因此本题极限为0。 □

题 2. 讨论二元极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$。

分析：本题是发散极限的多路径接近法问题，但是在选择接近路径时，任意的直线$y=kx$得出的一元函数极限都是0。这里涉及到选择收敛路径为抛物线的技巧。

Proof. 使用多路径接近法，首先取$y=x$而$x\to0$，此时

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^4+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2+1}=0,\tag{74}$$

特别地，对本题采用任意直线意$y=kx$接近$(0,0)$，其中k是常数（即(x,y)沿斜率是k的直线接近$(0,0)$），得到的一元极限均为0。这使得你猜测本题的二元极限是收敛的而非发散的，然而我们可以考虑下面的情形：取抛物线接近路径$y=x^2$，同时$x\to0$，这时

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\tag{75}$$

由此找到收敛于两个不同值的两条接近路径。所以本题极限发散， □

题 3. 求$f(x,y)=\begin{cases} y\ln\left(x^2+y^2\right), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在$(0,0)$的偏导数。

分析：本题是分段函数，使用偏导数的定义分别计算。本题的函数在$(0,0)$只存在x为自变量的偏导数，不存在y为自变量的偏导数。

Proof. 根据定义分别有

$$\partial_x f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0, \tag{76}$$

因此$\partial_x f(0,0)=0$。另一方面

$$\partial_y f(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y\ln\left((\Delta y)^2\right)-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}2\ln(\Delta y)=-\infty, \tag{77}$$

所以$f(x,y)$在$(0,0)$不存在以y自变量的偏导数。 □

题 4. 证明：$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在$(0,0)$可微但是偏导数不连续。

分析：要证明$f(x,y)$在$(0,0)$可微，必须首先计算$f(x,y)$在$(0,0)$的两个偏导数，然后使用定义验证可微性；要讨论$f(x,y)$偏导数在$(0,0)$的连续性，则需要计算$f(x,y)$在$(0,0)$邻域的偏导数。本题实际给出了定理1.4的反例，$f(x,y)$偏导数在$(0,0)$不连续，但是依然可微。本题证明偏导数连续性涉及的极限计算比较复杂。

Proof. 我们首先考虑偏导数的连续性。注意到$f(x,y)$在原点$(0,0)$分段定义。当$(x,y)\neq(0,0)$时，我们可以直接使用一元函数求导公式计算偏导数

$$\partial_x f(x,y)=y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \tag{78}$$

$$\partial_y f(x,y)=x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right). \tag{79}$$

当$(x,y)=(0,0)$时，我们使用定义求偏导数

$$\partial_x u(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0. \tag{80}$$

同理$\partial_y u(0,0)=0$。判定偏导数$\partial_x f(x,y)$在$(0,0)$连续实际是讨论

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right], \tag{81}$$

是否收敛于0。可以分成两部分讨论，首先$\left|y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\le|y|$，根据夹逼原理

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0, \tag{82}$$

另一方面考虑$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$，我们用多路径接近法证明发散，取$x=y$且$x\to0$有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)\ \text{发散}. \tag{83}$$

所以$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$发散。结合两部分我们得出极限(81)发散，所以偏导数$\partial_x f$在$(0,0)$不连续；偏导数$\partial_y f$同理也在$(0,0)$不连续。

下面证明$f(x,y)$在$(0,0)$可微，根据定义我们实际证明式(50)的极限是否成立。实际上

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-0\Delta-0\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y\sin\left(\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}. \tag{84}$$

我们利用平均值不等式$(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\ge2|\Delta x\Delta y|$放缩

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta x\Delta y\sin\left(\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| &\le \left|\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{2|\Delta x\Delta y|}}\right|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)\right|\\ &\le \sqrt{\frac{|\Delta x\Delta y|}{2}},\end{aligned} \tag{85}$$

由于$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\sqrt{\frac{|\Delta x\Delta y|}{2}}=0$，所以极限(84)收敛于0。

□

题 5. 二元函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上存在连续的偏导数，满足$x\partial_x f(x,y)+y\partial_y f(x,y)=0$对一切$(x,y)\in\mathbb{R}^2$成立，证明：存在函数$F$使得$F(\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$对一切$r\ge0$成立，其中$(r,\theta)$对应$(x,y)$的极坐标。

分析：本题要证明的核心实际是，当θ给定时二元函数$f(r\cos\theta,r\sin\theta)$关于$r$为常值函数，根据此前一元函数理论，我们需要证明$\partial_r\left(f(r\cos\theta,r\sin\theta)\right)=0$。

Proof. 令$g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$，我们需要证明$g(r,\theta)$只依赖$\theta$，当$\theta$给定$g(r,\theta)$是关于$r$的常函数，即$\partial_r g(r,\theta)=0$对一切$(r,\theta)$成立。

根据链式法则有

$$\partial_r g(r,\theta)=\cos\theta\partial_x f(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\partial_y f(r\cos\theta,r\sin\theta). \tag{86}$$

根据极坐标的定义有

$$\partial_r g(r,\theta)=\frac{x}{r}\partial_x f(x,y)+\frac{y}{r}\partial_y f(x,y)=0,\ r\in(0,+\infty), \tag{87}$$

固定θ将$g(r,\theta)$看作只以r为自变量的一元函数，结合$\partial_r g(r,\theta)=0$可知$g(r,\theta)=C(\theta)$对一切$r\in[0,+\infty)$成立，命题得证。

□

2.2 扩展补充题

补 1. 计算下列函数偏导数

1.$f(x,y)=x^{x^y}$

2.$f(x,y)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

补 2. ***2021高等数学B期末考试题.*** 证明$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & x^2+y^2+z^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2+z^2=0\end{cases}$在点$(0,0,0)$不可微。

补 3. ***2021高等数学B期末考试题.*** 设f,g都具有连续的二阶偏导数，当$x\neq 0$时定义$h(x,y)=xf\left(\frac{y}{x}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$，计算$x^2\partial_{xx}h(x,y)+2xy\partial_{xy}h(x,y)+y^2\partial_{yy}h(x,y)$。

补 4. 考虑$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，回答下列问题：

1.证明$f(x,y)$在$(0,0)$存在偏导数但是不可微。

2.令$x=y=t$则$g(t)=f(t,t)=\frac{t}{2}$，此时$g'(t)\neq f'_x(t)+f'_y(t)$链式法则失效，说明这一错误出现的理由。