多元函数微分学的应用讲义：习题版

谢彦桐

北京大学数学科学学院

2021.12.21

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。题型说明，基础题指方法非常标准的题目，综合题指方法标准但需要一些技术技巧的题目，进阶题指方法不常规的题目。

1 知识点理解

在上一章学习的多元函数微分学的基础上，我们这一节讨论多元函数微分学的应用，包括泰勒公式、隐函数定理和极值问题。

1.1 二元函数泰勒公式

与一元泰勒公式相近，二元泰勒公式构造的目的也是近似一般的函数。我们将首先介绍二元泰勒公式的形式，然后计算泰勒公式的计算方法。

理解二元函数泰勒公式

我们回忆一元泰勒公式的构造：对于一般的函数$f(x)$，我们想在x_0附近用一个多项式近似$f(x)$，由此我们构造了泰勒多项式：

$$P_n^T = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{1}$$

其中$P_n^T(x)$是一个n次多项式，当然为了研究多项式在x_0附近的行为我们把每一项都写成了$x-x_0$的形式。我们可以证明在x_0附近$P_n^T(x) \approx f(x)$，近似的误差被称为余项，它是一个高阶的无穷小量：

$$e(x) = f(x) - P_n^T(x) = o\left((x-x_0)^n\right). \tag{2}$$

我们将泰勒多项式和余项写在一起，就得到泰勒公式：

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n^T(x)+e(x) \\ &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right). \\ & \qquad (x\to x_0) \end{aligned} \tag{3}$$

对于二元函数，我们也希望在x_0附近用某个多项式近似f。我们首先明确的第一个问题是，二元多项式是什么。一次的二元多项式$P_1(x,y)$的形式形如：

$$P_1(x,y)=a_0+a_{11}x+a_{12}y, \tag{4}$$

它包含了常数项和x,y的一次项，一个一次二元多项式由三个系数确定。二次多项式的一般形式是

$$P_2(x,y)=a_0+a_{11}x+a_{12}y+a_{21}x^2+a_{22}xy+a_{23}y^2, \tag{5}$$

它包含了常数项，一次项x,y和二次项x^2,y^2,xy，其中二次项包括交叉项xy。二次一元多项式需要由六个系数确定，由此可见二元多项式相较一元多项式各项更复杂，如果考虑三元多项式，则其交叉项会更多。

我们现在要做的是，给定一个函数$f(x,y)$，我们如何构造一个n次的二元多项式对f达到更好的近似。为了方便起见令$\Delta x=x-x_0$和$\Delta y=y-y_0$，我们构造形如下述的二元多项式

$$\begin{aligned} P(x,y) &= a_0+a_{11}(x-x_0)+a_{12}(y-y_0)+a_{21}(x-x_0)^2+a_{22}(x-x_0)(y-y_0)+ \\ &\quad a_{23}(y-y_0)^2+\cdots \\ &= a_0+a_{11}\Delta x+a_{12}\Delta y+a_{21}(\Delta x)^2+a_{22}\Delta x\Delta y+a_{23}(\Delta y)^2+\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

经过严格的数学分析，我们可以给出如下的n次二元泰勒多项式，作为对f的局部最佳近似：

$$\begin{aligned} & P_n^T(x,y) \\ =\ & f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+ \\ & \cdots\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{7}$$

乍一见(7)的形式似乎与式(6)中的二元多项式相差甚远，实际上我们在(7)中使用了一些简化记号：例如一次项

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)=\Delta x\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\Delta y\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \tag{8}$$

实际上就是把微分运算$\frac{\partial}{\partial x}$和$\frac{\partial}{\partial y}$先写成求和（线性表出）$\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}$然后作用到函数$f$上并在$(x_0,y_0)$取值，其实际意义与分别运算是一致的。而二次项

$$\begin{aligned}
&\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)\\
=\;&(\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)+\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)+(\Delta y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\\
=\;&(\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)+2\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)+(\Delta y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0),
\end{aligned}\tag{9}$$

上述运算的第一步，是把求导运算表达式$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$利用二项式定理的方法展开为

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=(\Delta x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\Delta x\Delta y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\Delta x\Delta y\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}+(dty)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2},\tag{10}$$

然后作用到函数f上并在(x_0,y_0)取值。式(9)的第二步，则是假设了混合偏导数$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$的情形下将两项合并，在处理泰勒公式相关的计算题中我们一般假设两个混合偏导数相等。

总结下来，式(7)给出的二元多项式$P_n^T(x,y)$被称为f在x_0,y_0)附近的n**次泰勒多项式**。在式(7)中我们使用了求导运算简写方式，这样的简写对于初学者可能难以理解，但是却有着书写简便的有点。当计算函数的泰勒多项式时，我们必须要将形如式(7)的展开写成形如(6)的标准多项式形式。

最后，我们可以给出泰勒多项式的余项。考虑n次泰勒多项式$P_n^T(x,y)$，其余项是

$$e(x,y)=f(x,y)-P_n^T(x,y)=o\left(\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)^n\right).\tag{11}$$

结合余项，我们可以写出完整的泰勒公式

$$\begin{aligned}
f(x,y)\;=\;&f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\\
&\cdots\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+o\left(\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)^n\right).\\
&((x,y)\to(x_0,y_0))
\end{aligned}\tag{12}$$

泰勒公式的计算

与一元情形类似，计算二元函数$f(x,y)$泰勒公式最基本的方法是通过计算f在点(x_0,y_0)的各个偏导数，然后通过式(12)组装成完整的泰勒公式。这样的题目是考试中最为标准的题型：

例 1. 写出函数$f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$在点$(a,b)$处的二次泰勒多项式，其中$a,b>0$。

Proof. 我们首先写出二次泰勒多项式的形式：

$$\begin{aligned} P_2^T(x,y) &= f(x_0,y_0)+\Delta x\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\Delta y\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{1}{2}(\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)+ \\ &\quad \Delta x\Delta y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)+\frac{1}{2}(\Delta y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{13}$$

由此我们需要计算$f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$在点$(a,b)$处的各个一阶和二阶偏导数。

首先计算一阶偏导数：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{14}$$

以及

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{-x}{x^2+y^2}. \tag{15}$$

代入$a,b>0$得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{b}{a^2+b^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\frac{-a}{a^2+b^2}. \tag{16}$$

接下来计算二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \tag{17}$$

以及

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \tag{18}$$

还有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \tag{19}$$

代入$a,b>0$得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)=\frac{-2ab}{(a^2+b^2)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}. \tag{20}$$

组装成二次泰勒多项式

$$\begin{aligned} P_2^T(x,y) &= \arctan\frac{a}{b}+\frac{b(x-a)}{a^2+b^2}+\frac{-a(y-b)}{a^2+b^2}+\frac{-ab(x-a)^2}{(a^2+b^2)^2}+ \\ &\quad \frac{(a^2-b^2)(x-a)(y-a)}{(a^2+b^2)^2}+\frac{ab(y-b)^2}{(a^2+b^2)^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

□

由于计算偏导数是很复杂的，计算二次泰勒多项式就需要计算六个偏导数，计算量非常大。为此我们还可以提出一些不使用偏导数就可以计算泰勒公式或泰勒多项式的方法。这些方法依赖典型的一元泰勒公式，我们通过例题简要介绍。

例 2. 换元法 求$f(x,y)=\ln(1+x+y)$在点$(0,0)$附近的泰勒公式，展开到三次。

Proof. 当$z\to 0$时用一元泰勒公式

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}+o(z^n), \tag{22}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时$x+y\to 0$，由此我们可以在式(22)中取$z=x+y$然后展开到三次：

$$\begin{aligned}\ln(1+x+y) &= x+y-\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+y)^3}{3}+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\\ &= x+y-\frac{x^2}{2}-xy-\frac{y^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^2y+xy^2+\frac{y^3}{3}+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

□

注解 1. 由于我们需要展开到三次，因此我们只需要展开到$\frac{(x+y)^3}{3}$项就可以了，更高次的项$\frac{(x+y)^4}{4}$展开得到的式子至少是四次的。另外式(22)和式(23)二次泰勒展开余项分别为$o\left((x+y)^3\right)$和$o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)$，根据均值不等式$(x+y)^3\le\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$，所以可以将式(22)的余项归入式(23)的余项中，然后根据泰勒公式的唯一性可得(23)是正确的泰勒公式。

例 3. 四则运算法 求$f(x,y)=x\mathrm{e}^{x+y}$在点$(0,0)$附近的泰勒公式，展开到三次。

Proof. 根据上一题的方法，我们很容易写出e^{x+y}的泰勒公式

$$\mathrm{e}^{x+y}=1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+y)^3}{6}+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right). \tag{24}$$

我们在上式同乘x

$$\begin{aligned}x\mathrm{e}^{x+y} &= x+x(x+y)+\frac{x(x+y)^2}{2}+\frac{x(x+y)^3}{6}+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\\ &= x+x^2+xy+\frac{x^3}{2}+x^2y+\frac{xy^2}{2}+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right),\end{aligned} \tag{25}$$

其中项$\frac{x(x+y)^3}{6}$是四次项，融入了小量$o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)$。 □

高阶偏导数的计算与泰勒公式

直接计算高阶偏导数通常很复杂。由于泰勒多项式的系数和函数的高阶偏导数息息相关，因此我们可以通过计算泰勒多项式来计算高阶偏导数。我们来看下列例题：

例 4. 求$f(x,y)=x\mathrm{e}^{x+y}$各个三阶偏导数在在点$(0,0)$处的函数值。

Proof. 由于f具有很高的连续性，所以我们只需要计算四个高阶偏导数：

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0),\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0),\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0),\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0). \tag{26}$$

我们分析泰勒多项式的三次项，用(7)的求导运算表示为

$$\frac{1}{6}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,0). \tag{27}$$

我们可以将上述运算通过二项式展开写成一般三次多项式的形式（注意我们研究的是$(0,0)$出的泰勒公式，因此增量函数$\Delta x = x, \Delta y = y$）

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)x^3+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)x^2y+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)xy^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)y^3. \tag{28}$$

注意到$f(x,y) = x\mathrm{e}^{x+y}$泰勒展开的三次项是

$$\frac{x^3}{2}+x^2y+\frac{xy^2}{2}. \tag{29}$$

通过逐项对比得到

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)=3,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)=2,\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)=1,\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)=0. \tag{30}$$

□

1.2 隐函数定理

隐函数是指没有直接不等式，而通过方程确定的函数。在第二章我们研究过隐函数的求导方法，这节我们主要讨论隐函数的存在性，并将隐函数扩展的多元函数。

理解隐函数存在定理

我们考虑等式

$$F(x,y)=0, \quad x\in[a,b]. \tag{31}$$

对于每一个$x\in[a,b]$，如果对应唯一的y使得等式(31)成立，那么我们就可以定义**隐函数**f，其将每一个$x\in[a,b]$映射为满足等式的y。

然而隐函数的定义有三个问题：

1.是不是对于每一个$x\in[a,b]$我们都能找到y使得等式(31)成立？

2.有没有可能某个$x\in[a,b]$，可以找到两个或以上y使得等式(31)成立，由此导致"一x对多y"的错误情形呢？

3.我们希望得到的隐函数至少应该是连续的，否则没有研究价值。

问题**1**比较好解决，我们只要把隐函数的定义域设置为存在y的x即可。问题**2,3**则相当棘手，它是隐函数定理想解决的问题。

我们现在不妨只尝试构造局部的隐函数。所谓局部，就是我们首先选定隐函数上的一个点(x_0,y_0)，那么这个点一定满足$F(x_0,y_0)=0$。我们只关心能不能再x_0的一个邻

域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中定义隐函数，即对每一个$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$使得有且仅有一个$y$满足等式(31)。**因此，我们本节研究隐函数存在性必须指定在某个点附近研究！**

为了将隐函数f的定义域延伸到x_0的一个邻域里，**隐函数定理**告诉我们需要三个条件：

1.二元函数$F(x,y)$在点(x_0,y_0)的邻域有定义。

2.二元函数F的偏导数$\partial_x F$和$\partial_y F$在点(x_0,y_0)的邻域连续。

3.二元函数的偏导数满足$\partial_y F(x_0,y_0)\neq 0$。

当上述三个要求成立时，我们可以找到x_0的一个邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，在此邻域上可以唯一地定义隐函数$y=f(x)$满足两个属性

1.几何属性 隐函数f的图像穿过点(x_0,y_0)，并且f的图像始终位于平面点(x_0,y_0)的一个邻域之内。

2.光滑属性 隐函数f在邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$可导。

隐函数定理的三个条件，**1,2**通常比较好满足，我们一般只需验证**3**。

我们以单位圆$x^2+y^2=1$为例，如果隐函数f由$x^2+y^2=1$确定，那么f的图像必然位于单位圆上。设$F(x,y)=x^2+y^2$，那么上述三个要求的**1,2**都很容易满足，而$\partial_y F=2y$，所以只要$y_0\neq 0$，条件**3**也满足。

由此我们考虑单位圆上两个点$A(0,1)$和$B(1,0)$，分别研究A,B局部的隐函数是否存在。对于A来说，我们有$\partial_y F\mid_A\neq 0$，所以隐函数定理告诉我们隐函数确实存在。我们只要考虑可导$y=\sqrt{1-x^2}$在$(-1,1)$定义，它对应单位圆的上半圆，$y=\sqrt{1-x^2}$的图像连续地穿过A，正是我们想找到穿过A的隐函数。你可能质疑，对于每个$x\in(-1,1)$不是有$y=\pm\sqrt{1-x^2}$满足$x^2+y^2=1$吗？然而我们构造的隐函数，在对于每一个自变量x总选择正值$y=\sqrt{1-x^2}$与之对应，这种“合理”的选择使得隐函数穿过A，并且是可导的。这种“合理选择”也是隐函数定理的妙处。

我们现在转而考虑点B，之前的分析告诉我们$\partial_y F\mid_B=0$，因此隐函数不存在。从图像上来看，由于单位圆的半径为1，当$x\leq 1$时我们可以定义光滑函数$y=\sqrt{1-x^2}$或$y=-\sqrt{1-x^2}$穿过B，但是当$x>1$我们就找不到y满足$x^2+y^2=1$了，因此隐函数无法定义。于是我们无法在B的邻域里定义隐函数，隐函数无法向$x>1$延伸。

例 5. 设p是给定实数。证明：*存在1的两个开邻域U,V，使得可以唯一地定义以U为定义域的函数$y=f(x)$，满足$y\in V$对$\forall x\in U$成立，并且$x^p+y^p-2xy=0$对一切$x\in U$成立。*

Proof. 定义$F(x,y)=x^p+y^p-2xy$，那么$F(1,1)=0$。题目的要求就是让我们在1的邻域U定义唯一的图像穿过$(1,1)$的隐函数$y=f(x)$。我们使用隐函数存在定理，首先计算

$$\partial_x F(x,y)=px^{p-1}-2y,\quad \partial_y F(x,y)=py^{p-1}-2x. \tag{32}$$

对任意p，$\partial_x F$和$\partial_y F$都在$(1,1)$附近连续，并且

$$\partial_y F(1,1) = p - 2. \tag{33}$$

因此我们分情况讨论：如果$p \neq 2$，那么$\partial_y F(1,1) \neq 0$，根据隐函数存在定理，一定存在唯一的图像穿过$(1,1)$的隐函数$y = f(x)$再某个开邻域U定义，其函数值$y \in V$其中V是某开邻域。如果$p = 2$，隐函数定理失效，我们观察到

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2. \tag{34}$$

因此$F(x,y) = 0$的充分必要条件是$y = x$，因此$y = x$是F定义的唯一的隐函数，其图像穿过$(1,1)$，并且在全体实数上都有定义。 □

注解 2. 本例告诉我们，即便隐函数定理的条件$\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$不成立，隐函数也有可能存在。

隐函数偏导数的计算

从这一部分开始，我们总是假设隐函数存在，然后研究隐函数的导数。对于满足等式(31)的原函数$y = f(x)$，其求导法已在第二章涉及，但是第二章我们尚无法给出隐函数求导的一般公式。通过偏导数的方法，我们将给出隐函数求导的一般公式。

如果$y = f(x)$满足等式(31)，那么

$$F(x, f(x)) = 0, \tag{35}$$

是恒为0的以x为自变量的一元函数。因此可以计算其导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x, f(x))\right) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) f'(x) = 0. \tag{36}$$

由于隐函数存在定理保证了$\frac{\partial F}{\partial y}$在局部非0，我们得到

$$f'(x) = -\frac{\partial_x F(x,y)}{\partial_y F(x,y)}. \tag{37}$$

虽然式(37)给出了隐函数导数的一般形式，但是大多数情况我们无需公式(37)就可以计算隐函数偏导数。我们来看下述例题：

例 6. 根据前面的题目，等式$x^3 + y^3 - 2xy = 0$可以确定$(1,1)$附近的偏导数$y = f(x)$，计算$f'(x)$。

Proof. **方法1：通过公式**(37) 代入公式得

$$f'(x) = -\frac{3x^2 - 2y}{3y^2 - 2x}. \tag{38}$$

方法2：用第二章的方法直接计算 我们注意到

$$x^3+(f(x))^3-2xf(x)=0, \tag{39}$$

是关于x的恒等式，求导得

$$3x^2+3(f(x))^2f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=0. \tag{40}$$

化简得到

$$\left(3(f(x))^2-2x\right)f'(x)=2f(x)-3x^2. \tag{41}$$

由此可得

$$f'(x)=\frac{2f(x)-3x^2}{3(f(x))^2-2x}=\frac{2y-3x^2}{3y^2-2x}. \tag{42}$$

□

注解 3. 根据上述公式的推导和例题我们发现，即便导数$y=f'(x)$本应该是只关于x的函数，但是由于f是由偏导数确定的，所以f'的表达式中还是含有项y，例如例题中的$f'(x)=\frac{2y-3x^2}{3y^2-2x}$。但是这里的$y$应理解关于$x$的隐函数，即复合函数$f'(x)=\frac{2f(x)-3x^2}{3(f(x))^2-2x}$。

二元隐函数及其偏导数的计算

接下来的部分讨论是隐函数定理的两种变形。首先是二元隐函数问题，我们考虑由三个变量的等式

$$F(x,y,z)=0. \tag{43}$$

对于每一个平面点(x,y)，我们希望可以得到唯一的z使得等式(43)成立，由此就可以得到隐函数$z=f(x,y)$。**这里的隐函数与此前的区别是它是一个二元函数。**因此在讨论隐函数时，应首先关注要讨论的隐函数是一元函数还是二元函数。

我们做两个工作：修改隐函数存在定理以使用二元隐函数情形和模仿式(37)得到二元隐函数偏导数计算公式。

首先是二元隐函数定理，我们很容易改进隐函数定理的三个条件：我们找到点(x_0,y_0,z_0)满足$F(x_0,y_0,z_0)=0$，那么在点(x_0,y_0,z_0)附近隐函数存在需要三个条件：

1.二元函数$F(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)的邻域有定义。
2.二元函数F的偏导数$\partial_xF,\partial_yF,\partial_zF$在点$(x_0,y_0,z_0)$的邻域连续。
3.二元函数的偏导数满足$\partial_zF(x_0,y_0,z_0)\neq 0$。
其中，由于隐函数的因变量是z，使用**3**改为要求对z偏导数非0。

接着是二元隐函数偏导数的计算方法。依然是将隐函数$z = f(x, y)$代入等式(43)，那么

$$F(x, y, f(x, y)) = 0, \tag{44}$$

是恒为0的以x, y为自变量的二元函数。因此可以计算其导数

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x, y, f(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0. \tag{45}$$

移项得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial_x F(x, y, z)}{\partial_z F(x, y, z)}. \tag{46}$$

同理计算

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial_y F(x, y, z)}{\partial_z F(x, y, z)}. \tag{47}$$

我们指出上述隐函数偏导数公式虽然看起来简洁，但是记忆起来非常容易混乱。下面的注记中我们给出一种常见的错误记忆方法。由此我建议同学们在做隐函数求导时应使用下述例题的直接计算方法，用公式加以验算。

注解 4. 由于$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$也写作$\frac{\partial z}{\partial x}$，所以有些同学想当然地模仿链式法则写出$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x}$，所以得到$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial_x F(x,y,z)}{\partial_z F(x,y,z)}$，与式(46)差一个符号。我们指出这种“链式法则”的理解方式是完全没有道理的。

例 7. 考虑等式$z + \cos xy = \mathrm{e}^z$，如果将$z$写作隐函数$z = z(x, y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$。

Proof. 将隐函数$z = z(x, y)$代入等式$z + \cos xy = \mathrm{e}^z$得到

$$T(x, y) = z(x, y) - \mathrm{e}^{z(x,y)} + \cos xy = 0, \forall x, y, \tag{48}$$

即T是两个恒为0的二元函数。为了计算$\frac{\partial z}{\partial x}$，我们计算$T$关于$x$的偏导数

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) - \mathrm{e}^{z(x,y)}\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) - y\sin xy = 0. \tag{49}$$

求解可以得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{y\sin xy}{1 - \mathrm{e}^{z(x,y)}} = \frac{y\sin xy}{1 - \mathrm{e}^z}. \tag{50}$$

□

方程组隐函数及其偏导数的计算

这一部分我们来研究另一类隐函数，方程组隐函数。我们将等式(31)改为三元等式组

$$\begin{cases} F(x, u, v) = 0, \\ G(x, u, v) = 0, \end{cases} \tag{51}$$

由于等式数量为2，对于给定x，理论上我们可以通过求解方程得到一组u, v。因此等式组(51)确定了两个隐函数$u = u(x)$和$v = v(x)$。我们做两个工作：修改隐函数存在定理以使用二元隐函数情形和模仿式(37)得到二元隐函数偏导数计算公式。

首先是二元隐函数定理，我们很容易改进隐函数定理的三个条件：我们找到点(x_0, u_0, v_0)满足$F(x_0, u_0, v_0) = 0$，那么在点(x_0, u_0, v_0)附近隐函数存在的三个条件，很容易将前两个修改为

1.三元函数$F(x, u, v)$和$G(x, u, v)$在点(x_0, u_0, v_0)的邻域有定义。

2.三元函数F的偏导数$\partial_x F, \partial_u F, \partial_v F$和三元函数$G$的偏导数$\partial_x G, \partial_u G, \partial_v G$在点$(x_0, u_0, v_0)$的邻域连续。

第三个条件不容易直接修改，因为这次的因变量有u, v两个，我们不能直接改为F或G对u或v求偏导。为此我们引进Jacobi行列式：考虑两个二元函数$F_1(u, v)$和$F_2(u, v)$，它们的Jacobi行列式的定义是

$$\frac{\mathrm{D}(F_1, F_2)}{\mathrm{D}(u, v)} = \begin{vmatrix} \partial_u F_1(u, v) & \partial_v F_1(u, v) \\ \partial_u F_2(u, v) & \partial_v F_2(u, v) \end{vmatrix} \tag{52}$$

在本节我们只是提出了Jacobi行列式的定义，我们指出Jacobi行列式依然是一个关于u, v的二元函数，Jacobi行列式在点(u_0, v_0)的取值记为$\left.\frac{\mathrm{D}(F_1, F_2)}{\mathrm{D}(u, v)}\right|_{(u_0, v_0)}$。关于Jacobi行列式更细节的理解将在下学期学习。

注解 5. 我们指出定义*Jacobi*行列式式时，函数自变量的个数和函数个数必须相等。如式(52)定义了两个函数和两个自变量的*Jacobi*行列式。类似地，三个三元函数也可以定义*Jacobi*行列式。

现在我们回头看方程组情形隐函数定理条件**3**的改进，我们改为使用Jacobi行列式：

3.将函数F, G看作两个关于自变量u, v的二元函数时，Jacobi满足$\left.\frac{\mathrm{D}(F, G)}{\mathrm{D}(u, v)}\right|_{(x_0, u_0, v_0)} \neq 0$。

关于方程组隐函数的偏导数，我们依然可以用类似的方法推出：将$u = u(x)$和$v = v(x)$代入方程组(51)中：

$$\begin{cases} F(x, u(x), v(x)) = 0, \\ G(x, u(x), v(x)) = 0, \end{cases} \tag{53}$$

两个等式分别对自变量x求导得

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} u'(x) + \frac{\partial F}{\partial v} v'(x) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} u'(x) + \frac{\partial G}{\partial v} v'(x) = 0, \end{cases} \tag{54}$$

实际计算$u'(x)$和$v'(x)$，需要我们求解方程组(54)得到$u'(x)$和$v'(x)$。

例 8. 设$x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2, x+y+z=2$，考虑$(x,y,z)=(1,-1,2)$的邻域，证明等式组可以在局部确定隐函数$x=f(z)$和$y=g(z)$，然后计算导数$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$和$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$在点$(x,y,z)=(1,-1,2)$的函数值。

Proof. 定义两个三元函数

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2, \quad G(x,y,z)=x+y+z-2. \tag{55}$$

那么显然F,G在$(x,y,z)=(1,-1,2)$的邻域里都具有足够的光滑性。我们验证**3**的Jacobi行列式：

$$\left.\frac{\mathrm{D}(F,G)}{\mathrm{D}(x,y)}\right|_{(1,-1,2)}=\left|\begin{matrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{matrix}\right|_{(1,-1,2)}=2x-2y\mid_{(1,-1,2)}=4. \tag{56}$$

所以隐函数局部存在。

接下来计算隐函数的导数，我们可以通过套公式(54)或直接计算，得到关于f',g'的方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial x}f'(z)+\frac{\partial F}{\partial y}g'(z)=0, \\ \frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial x}f'(z)+\frac{\partial G}{\partial y}g'(z)=0, \end{cases} \tag{57}$$

代入F,G的表达式

$$\begin{cases} -z+2xf'(z)+2yg'(z)=0, \\ 1+f'(z)+g'(z)=0, \end{cases} \tag{58}$$

注意到我们要求解的是$(x,y,z)=(1,-1,2)$的函数值，所以

$$\begin{cases} 2f'(2)-2g'(2)=-2, \\ f'(2)+g'(2)=-1, \end{cases} \tag{59}$$

所以$f'(2)=-1, g'(2)=0$。 □

二元隐函数的二阶偏导数的计算

作为本节的结尾，我们讨论隐函数的高阶偏导数的计算。我们以二元隐函数为例，考虑例7的情形，我们算出了

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\sin xy}{1-\mathrm{e}^z}. \tag{60}$$

注意到$\frac{\partial z}{\partial x}$本应该是关于$x,y$的二元函数，但是由于$z(x,y)$是隐函数，所以$\frac{\partial z}{\partial x}$的表达式里包含了$z$。但是我们应该将$z$理解为一个复合的隐函数$z=z(x,y)$即

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\frac{y\sin xy}{1-\mathrm{e}^{z(x,y)}}. \tag{61}$$

理解了二元隐函数偏导数的形式，我们可以通过复合函数求导法计算二元隐函数的二阶偏导数：

例 9. 考虑等式$z+\cos xy=\mathrm{e}^z$，如果将z写作隐函数$z=z(x,y)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

Proof. 对$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$求一次关于$x$的偏导数，本质就是求一次复合偏导数，即

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y\sin xy}{1-\mathrm{e}^{z(x,y)}}\right] \\
&= \frac{\partial_x(y\sin xy)\cdot(1-\mathrm{e}^{z(x,y)})-\partial_x\left(1-e^{z(x,y)}\right)\cdot(y\sin xy)}{\left(1-\mathrm{e}^{z(x,y)}\right)^2} \\
&= \frac{\left(y^2\cos xy\right)\cdot(1-\mathrm{e}^{z(x,y)})+\mathrm{e}^{z(x,y)}\partial_x z(x,y)(y\sin xy)}{\left(1-\mathrm{e}^{z(x,y)}\right)^2} \\
&= \frac{y^2\cos xy(1-\mathrm{e}^z)+y\mathrm{e}^z\sin xy\partial_x z}{(1-\mathrm{e}^z)^2},
\end{aligned}$$

其中复合函数导数

$$\partial_x\left(1-e^{z(x,y)}\right)=-e^{z(x,y)}\partial_x z(x,y). \tag{62}$$

然后再代入$\partial_x z$的表达式即可。 □

1.3 极值问题

一般极值问题

本节讨论的极值问题是一元极值问题的直接推论。

我们首先将极值和最值的概念推广到二元函数。假设$f(x,y)$的定义域是区域D，称点(x_0,y_0)是f的一个**极大(小)值点**，如果f在(x_0,y_0)的邻域U有定义，并且$f(x,y)\le(\ge)f(x_0,y_0)$对一切$(x,y)\in U$成立。极大(小)值点(x_0,y_0)是f在局部函数值最大(小)的点。同样地，极值点必须是D的内点，不能位于D的边界上。

称点(x_0,y_0)是f的**一个最大(小)值点**，如果$f(x,y)\le(\ge)f(x_0,y_0)$对一切$(x,y)\in D$成立，其中D是定义域。最大(小)值点(x_0,y_0)是f在局部函数值最大(小)的点。显然，极值点不一定是最值点，最值点或者是极值点或者是D的边界点。

二元函数极值问题相较一元极值复杂性大大提升，其主要原因是，一元函数我们可以直接通过函数的单调性判定极值点，如果一个点x_0在左侧单调递增右侧单调递减，那么x_0就一定是极大值点。二元函数无法定义单调性，而且靠近一个点(x_0,y_0)也不仅有左右两种方式，这是相当复杂的。但是好在我们还是可以模仿一元的情形，我们也可以通过二元函数$f(x,y)$的偏导数信息给出一个点(x_0,y_0)是极值点的充分条件或必要条件。为了方便起见，我们给f的各个二阶偏导数如下记号：

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0),\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0). \tag{63}$$

我们称B^2-AC为**判别式**。我们将相关充分和必要条件收集如下：

1.一阶必要条件 设f在点(x_0,y_0)可导（即两个偏导数$\partial_x f(x_0,y_0)$和$\partial_y f(x_0,y_0)$都存在），如果点(x_0,y_0)是f的一个极值点，那么$\partial_x f(x_0,y_0)=\partial_y f(x_0,y_0)=0$。

2.二阶充分条件 设f在点(x_0,y_0)的邻域有连续的二阶偏导数，如果一阶导数$\partial_x f(x_0,y_0)=\partial_y f(x_0,y_0)=0$，那么根据判别式的符号，我们有如下结论：

2.1 如果$B^2-AC<0$且$A>0$，那么(x_0,y_0)是一个极小值点。

2.2 如果$B^2-AC<0$且$A<0$，那么(x_0,y_0)是一个极大值点。

2.3 如果$B^2-AC>0$，那么(x_0,y_0)一定不是极值点。

2.4 如果$B^2-AC=0$，那么(x_0,y_0)可能是极值点，也可能不是极值点。

仿照一元情形，我们称满足$\partial_x f(x_0,y_0)=\partial_y f(x_0,y_0)=0$的点$(x_0,y_0)$为$f$的一个**稳定点**。极值点一定是稳定点，所以我们寻找极值点的思路依然是先找到稳定点，然后从稳定点中依照判别式符合要求的点。不是极值点的稳定点常被称作**鞍点**。

注解 6. 特别地，$B^2-AC<0$时是不可能出现$A=0$的情况的。

注解 7. 我们称由f的各个二阶偏导数构成的矩阵为f的$Hesse$矩阵

$$\mathrm{Hes}f(x_0,y_0)=\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}. \tag{64}$$

此前极值二阶条件的分析，都是通过带$Lagrange$余项的二元函数泰勒公式，将函数f在(x_0,y_0)附近沿各个方向函数值增减性转化为矩阵$\mathrm{Hes}f(x_0,y_0)$的性质。一般地，矩阵$\mathrm{Hes}f(x_0,y_0)$是正定蕴含着(x_0,y_0)是极小值点，矩阵$\mathrm{Hes}f(x_0,y_0)$是负定蕴含着(x_0,y_0)是极大值点，矩阵$\mathrm{Hes}f(x_0,y_0)$是不定蕴含着(x_0,y_0)不是极值点。由于矩阵正定性的定义超出了课程要求，课本将矩阵的正定性转化为分析判别式B^2-AC。此外，(x_0,y_0)是极小*(*大*)*值点的一个必要条件是矩阵$\mathrm{Hes}f(x_0,y_0)$半正*(*负*)*定，由于定义同样超出了课程要求，所以我们并没有给出二元函数极值的二阶必要条件。

根据上述分析，我们将极值点问题的分析步骤整理如下：

1.确定二元函数$f(x,y)$的定义域。

2.找到$f(x,y)$的所有稳定点。特别地，当f存在不可导的点时，不可导点也可能是极值点。总结出所有稳定点和不可导点“极值点候选人”$\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^N$。

3.对每一个(x_k,y_k)，通过分析判别式，结合二阶充分条件判断是否为极值点。

4.如果出现了困难情况$AC=B^2$或是不可导，此时无法通过判别式直接判断稳定点是不是极值点，我们需要结合函数性质具体情况具体分析。

例 10. 求函数$f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$在$(x,y)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$的所有稳定点，判断他们是不是极大值点或极小值点。

Proof. **第一步** 确定定义域$(x,y)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$。

第二步 由于$f(x,y)$在每一个点都可到，我们只需求稳定点，稳定点满足方程

$$\begin{cases}\partial_x f(x,y)=\cos x+\cos(x+y)=0,\\ \partial_y f(x,y)=\cos y+\cos(x+y)=0.\end{cases} \tag{65}$$

因此$\cos x=\cos y$。这说明两种可能性：$x=y$或者$x+y=2\pi$。带入$x+y=2\pi$可以得到$\cos x=\cos y=-1$，即$x=y=\pi$。带入$x=y$得$\cos x+\cos 2x=0$，这说明$x+2x=(2k+1)\pi$，其中$k\in\mathbb{N}^*$，这说明所有可能的情况为$x=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}$。综上所述，所有稳定点为

$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right),\quad(\pi,\pi),\quad\left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right). \tag{66}$$

第三步 根据判别式判断稳定点是否为极值点。我们首先计算二阶偏导数

$$\partial_{xx}f(x,y)=-\sin x-\sin(x+y), \tag{67}$$

$$\partial_{xy}f(x,y)=-\sin(x+y), \tag{68}$$

$$\partial_{yy}f(x,y)=-\sin y-\sin(x+y). \tag{69}$$

因此对每一个稳定点计算参数A,B,C：

	A	B	C
$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
(π,π)	0	0	0
$(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

根据表格性质，我们得到$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$是极大值点，$(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$是极小值点。而$(\pi,\pi)$满足$B^2=AC$，无法通过判别式判断是否为极值点，需要另外想办法。

第四步 针对点(π,π)讨论。我们将二元函数$f(x,y)$限制在直线$y=x$讨论，得到一元函数

$$g(x)=f(x,x)=2\sin x+\sin 2x=2\sin x(1-\cos x). \tag{70}$$

当$x<\pi$时$g(x)>g(0)=0$，而当$x>\pi$是$g(x)<g(0)=0$，因此π不是$g(x)$的极值点，由此(π,π)也不是$f(x,y)$极值点。

□

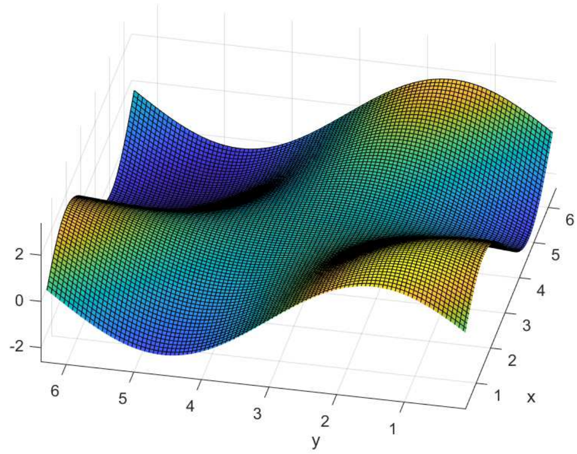

图 1: 函数$f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$示意图。

条件极值问题

在计算某二元函数$f(x,y)$的最小值的问题，由于实际条件所限，我们希望得到的不是二元函数$f(x,y)$在(x,y)完全自由情况下的最小值，而是x和y存在约束条件时的最小值。例如我们想求直线$x+y=1$上距离原点最近的点的坐标，这就相当于在约束条件$x+y=1$情况下求最小值问题$z=x^2+y^2$。对于这一约束极值问题，我们自然可以将$y=1-x$代入$z=x^2+y^2$求解一元极值问题。对于更复杂的约束，代入的方法并不明智。这类有约束的极值问题被称为被称为**条件极值问题**，其一般形式是

$$\text{在}\varphi(x,y)=0\text{的约束下求}z=f(x,y)\text{的最值点,} \tag{71}$$

其中等式$\varphi(x,y)=0$被称为**约束条件**。

求解这类问题的方法是**乘子法**，也称Lagrange乘子法。乘子法的核心是将条件极值问题转化为没有约束条件的一般极值问题。当我们想求解条件极值问题(71)时，我们转而构造新的三元函数

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y). \tag{72}$$

严格的数学结果告诉我们，条件极值问题(71)的极值点一定是三元函数$F(x,y,\lambda)$一般极值点。**由此我们可以通过计算三元函数$F(x,y,\lambda)$的稳定点来找到条件极值问题(71)的极值点：**

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ F_y(x,y,\lambda)=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=\varphi(x,y)=0, \end{cases} \tag{73}$$

得到的稳定点$\{(x_k,y_k,\lambda_k)\}_{k=1}^N$。我们指出，条件极值问题的极值点一定在三元稳定点之中，即某个(x_k,y_k)就是条件极值问题的解。

然而乘子法也有很大的局限性：首先乘子法并不能保证条件极值问题有解，所以可能所有稳定点$\{(x_k,y_k,\lambda_k)\}_{k=1}^N$都不是极值点。此外，我们找到了一系列稳定点$\{(x_k,y_k,\lambda_k)\}_{k=1}^N$，还需要锁定哪一个点是原条件极值问题的最值点。为此我们给出了利用乘子法解条件极值问题的一般思路：

1.说明条件极值问题(71)存在最值点。这一步难度通常很大，有些内容甚至超出课程要求，一般可以默认条件极值问题有解。

2.计算三元函数$F(x,y,\lambda)$的所有稳定点$\{(x_k,y_k,\lambda_k)\}_{k=1}^N$。

3.如果F的稳定点唯一，那么该点对应条件极值问题的解；如果F的稳定点不唯一，那么要在所有稳定点中寻找函数值$f(x_k,y_k)$最小(大)的点作为条件极值问题的解。

注解 8. 如果条件极值问题存在多个约束条件$\varphi_1(x,y)=0$和$\varphi_2(x,y)=0$，则需要构造四元的辅助函数

$$F(x,y,\lambda,\mu)=f(x,y)+\lambda\varphi_1(x,y)+\mu\varphi_2(x,y), \tag{74}$$

然后通过讨论四元函数的稳定点来得到原问题的最值点。

例 11. 求三维空间的曲线$\begin{cases} x-y+4z=1 \\ 2x^2+4y^2=3 \end{cases}$最高点和最低点高度之差。

Proof. 我们要求函数$f(x,y,z)=z$在约束条件$\varphi_1(x,y,z)=x-y+4z-1=0$和$\varphi_2(x,y,z)=2x^2+4y^2-3=0$的最大值和最小值。最值是存在的，因为$2x^2+4y^2=3$是空间里的椭圆柱，椭圆柱和直线$x-y+4z=1$交出的椭圆是有限的图形。

我们首先构造辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z+\lambda(x-y+4z-1)+\mu(2x^2+4y^2-3). \tag{75}$$

然后计算稳定点

$$\begin{aligned}
F_x &= \lambda+4x\mu=0, && (76)\\
F_y &= -\lambda+8y\mu=0, && (77)\\
F_z &= 1+4\lambda=0, && (78)\\
F_\lambda &= x-y+4z-1=0, && (79)\\
F_\mu &= 2x^2+4y^2-3=0 && (80)
\end{aligned}$$

计算方法为：首先由式(78)得$\lambda=-\frac{1}{4}$；代入式(76)和(77)得$-4x\mu=8y\mu=\lambda=-\frac{1}{4}$，所以$x=-2y$；代入式(80)得$(x,y)=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$或$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$。将$(x,y)$的两种取值代入式(79)可以得到$z$的取值由此得到两组稳定点

$$(x,y,z,\lambda,\mu)=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{5}{8},-\frac{1}{4},-\frac{1}{16}\right). \tag{81}$$

或

$$(x, y, z, \lambda, \mu) = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right). \tag{82}$$

这两个点分别对应条件极值问题的最大值点和最小值点。因此在点$\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$处$z = \frac{5}{8}$最大，在点$\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$处$z = -\frac{1}{8}$最小，它们差$\frac{3}{4}$。 □

2 习题归类

下面总结本章经典题型，这些题型的解法都在对应章节可以找到

1.二元函数泰勒公式的计算：基本方法、通过一元泰勒公式。

2.通过二元泰勒函数计算二元函数偏导数的函数值。

3.一元隐函数：利用隐函数定理证明存在性和导数的计算。

4.二元隐函数：利用隐函数定理证明存在性和偏导数的计算。

5.方程组隐函数：利用隐函数定理证明存在性和导数的计算。

6.Jacobi行列式的计算。

7.一般极值问题：四步处理法。

8.条件极值问题：乘子法。