# 含参变量积分

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后更新时间：2022年8月



## 1　知识内容理解

本节主要研究含参变量积分和含参变量无穷积分，学习时应该将这些积分对应到函数项级数的研究上，以免因为参数的复杂性产生混淆。

### 1.1　含参变量正常积分

#### 含参变量正常积分的定义和理解

假定二元函数$g(x,y)$在矩形$[a,b]\times[c,d]$定义，对于给定的$y\in[c,d]$，可以定义关于自变量$x$的正常积分

$$I(y)=\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

得到的积分值$I(y)$是关于自变量$y$的函数，称为**含参变量正常积分**，含参变量积分的自变量$y$被称为**参数**。由于定积分计算得分复杂性，我们希望在不写出$I(y)$显式表达式的基础上研究其连续、可导和积分性质，这是本节的主线。实际上，如果被积函数$g(x,y)$具有好的性质，在定积分之后可以传递给$I(y)$。为了方便起见，如不加说明我们均假定$g(x,y)$在矩形$[a,b]\times[c,d]$上连续。

一个自然的问题是，为什么$g(x,y)$对性质可以穿过定积分传递给含参变量积分$I(y)$呢？为了提升直观理解，我们考虑$[a,b]=[1,N+1]$。对于给定的$y$，可以将$x$在$[1,n+1]$的积分拆分到小区间$\{[n,n+1]\}_{n=1}^N$上，然后每一段用矩形面积$1\cdot g(n,y)$代替积分值：

$$I(y)=\int_1^{N+1} g(x,y)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^N\int_n^{n+1} g(x,y)\mathrm{d}x\approx\sum_{n=1}^N g(n,y)=\sum_{n=1}^N g_n(y), \tag{2}$$

其中我们记$g_n(y)=g(n,y)$为固定$n$以$y$为自变量的一元函数。在这种离散下，我们将含参变量积分$I(y)$可以近似为有限多个以$y$为自变量的函数$g_n(y)$的和，由于每一个$g_n(y)$都是连续的，因此和函数$\sum_{n=1}^{N} g_n(y)$也连续，我们就可以理解$I(y)$连续的缘由。类似地，$g_n(y)$的可导、积分性质也可以在离散的意义下传递给含参变量积分$I(y)$。

另一种关于$I(y)$连续性的理解方式是从几何视角来看。如图所示，固定$y\in[c,d]$，含参变量积分$I(y)=\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x$相当于阴影部分截面的面积。当$g(x,y)$具有连续性时，我们可以理解当$y$运动时，截面面积的大小是连续变化的。

## 含参变量正常积分的性质

下面我们系统总结含参变量正常积分的各种性质，我们会从如式(2)的角度展示这些公式的直观含义。首先是连续性公式

**定理 1.** 如果$g(x,y)$在矩形$[a,b]\times[c,d]$上连续，那么$I(y)=\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x$在$[c,d]$上连续。

作为推论，如果$g(x,y)$在矩形$[a,b]\times[c,d]$上连续，根据$I(y)$的连续性有

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x=I(y_0)=\int_a^b g(x,y_0)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\lim_{y\to y_0} g(x,y)\right)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

由此定理1的推论保证了积分号$\int_a^b$和极限号$\lim_{y\to y_0}$可以更换计算顺序。然而我们必须指出，积分号$\int_a^b$和极限号$\lim_{y\to y_0}$交换运算顺序的操作是$g(x,y)$连续性保证的，如果$g(x,y)$不具有连续性，交换顺序的操作一般不成立。因此在使用积分号和极限号的换序性质时，必须首先指定$g(x,y)$连续的矩形区域$[a,b]\times[c,d]$。

另一类重要的含参变量积分是积分上限和下限依赖参数$y$的积分，成为**含参变量变限积分**。依然设$g(x,y)$在矩形$[a,b]\times[c,d]$上连续，函数$u(y)$和$v(y)$是在$[c,d]$定义且取值于$[a,b]$的函数，含参变量变限积分形如

$$I(y)=\int_{u(y)}^{v(y)} g(x,y)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

对于含参变量变限积分，我们也有如下的连续性定理:

**定理 2.** 如果$g(x,y)$在矩形$[a,b]\times[c,d]$上连续，函数$u(y)$和$v(y)$是在$[c,d]$定义且取值于$[a,b]$的连续函数，那么$I(y)=\int_{u(y)}^{v(y)} g(x,y)\mathrm{d}x$在$[c,d]$上连续。

我们在讨论含参变量变限积分的连续性时，应首先找到使得$g(x,y)$连续的足够大的矩形区域$[a,b]\times[c,d]$，然后确保上限和下限函数取值于$[a,b]$中。我们来看下面的例题:

**例 1.** 计算极限$\lim_{y\to 0}\int_y^{y+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{4+x^2 y}\mathrm{d}x$。

分析：本题有两种方法，一种方法是直接借用含参变量变限积分的连续定理。一种是先换元将含参变量积分的上下限处理为不依赖参数$y$。我们分别介绍两种方法。不论哪一种方法，都需要指定使得二元函数$\frac{\sin^2 x}{4+x^2 y}$连续的矩形区域$[a,b]\times[c,d]$。

*Proof.* **方法1.直接使用含参变量变限积分连续性** 我们需要选定$g(x,y)=\frac{\sin^2 x}{4+x^2 y}$的连续性，由于分子$\sin^2 x$和分母$4+x^2y$都连续，为了$g(x,y)$连续只需分母非0。考虑区域$(x,y)\in[-1,1]\times[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$，区域满足$|x^2y|<\frac{1}{4}$，所以分母非0。此外当$y\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$时，积分上下限$y,y+\frac{\pi}{2}\in[-1,1]$，由此可以使用含参变量变限积分的连续性定理：

$$\lim_{y\to 0}\int_y^{y+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{4+x^2y}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{16}. \tag{5}$$

**方法2.使用换元法化为一般的含参变量积分** 对给定参数$y$，在含参变量积分应用换元$z=x-y$得到

$$\int_y^{y+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{4+x^2y}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(z+y)}{4+y(z+y)^2}\mathrm{d}z. \tag{6}$$

接下来我们要确认二元函数$h(z,y)=\frac{\sin^2(z+y)}{4+y(z+y)^2}$在矩形定义域的连续性，由于分子$\sin^2(z+y)$和分母$4+y(z+y)^2$对一切$(z,y)\in\mathbb{R}^2$都连续，为了二元函数$h(z,y)$连续需要分母非0。考虑在区域$(z,y)\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\times[-1,1]$，我们可以证明$\left|y(z+y)^2\right|\leq\frac{9}{4}$，所以分母$4+y(z+y)^2$在区域$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\times[-1,1]$总非0，因此二元函数$\frac{\sin^2(z+y)}{4+y(z+y)^2}$在区域$(z,y)\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\times[-1,1]$连续。应用式(3)得到

$$\lim_{y\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(z+y)}{4+y(z+y)^2}\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2(z+y)}{4+y(z+y)^2}\right)\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 z}{4}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{16}. \tag{7}$$

总结下来，如果使用含参变量变限积分的连续性定理，指定的矩形区域$[a,b]\times[c,d]$必须保证积分上限和积分下限也满足相应的要求，会复杂一些。但是少了定积分换元的步骤，计算会简单不少。 □

接下来我们讨论含参变量积分$I(y)$在$[c,d]$上的定积分:

**定理 3.** 如果$g(x,y)$在矩形$[a,b]\times[c,d]$上连续，那么$I(y)=\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x$在$[c,d]$上可积，并且积分值满足

$$I=\int_c^d I(y)\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_c^d g(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

从形式上看，式(8)与此前学习的重积分换序是一致的，即对于一个定义域为矩形$[a,b]\times[c,d]$的连续函数二元函数$g(x,y)$，先对自变量$x$积分然后再对自变量$y$积分，和先对自变量$y$积分再对自变量$x$积分效果一致。从含参变量积分的角度看，相

当于我们想要计算$I(y)$的积分，就可以先计算二元函数$g(x,y)$对参数$y$的积分$G(y) = \int_c^d g(x,y)\mathrm{d}y$，然后再对$G(y)$积分。

最后，我们也可以从离散的角度理解含参变量积分的定积分公式：考虑

$$I(y) = \int_1^{N+1} g(x,y)\mathrm{d}x \approx \sum_{n=1}^{N} g_n(y), \tag{9}$$

对左右两式同时在$y \in [c,d]$积分，有限项函数和的定积分等于各项定积分的和

$$\int_c^d I(y)\mathrm{d}y \approx \int_c^d \left(\sum_{n=1}^{N} g_n(y)\right)\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{N}\left(\int_c^d g_n(y)\mathrm{d}y\right). \tag{10}$$

由此

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\int_c^d g_n(y)\mathrm{d}y\right) \approx \int_1^{N+1}\left(\int_c^d g(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \tag{11}$$

最后我们讨论含参变量积分$I(y)$的求导公式：

**定理 4.** 如果$g(x,y)$在矩形$[a,b]\times[c,d]$上连续，且关于参数$y$的偏导数$g'_y(x,y)$在矩形$[a,b]\times[c,d]$上存在且连续，那么$I(y) = \int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x$在$[c,d]$上可积，并且导数值满足

$$I'(y) = \int_a^b g'_y(x,y)\mathrm{d}x. \tag{12}$$

从形式上看，式(12)告诉我们关于参数$y$的求导运算和积分运算$\int_a^b$可以交换运算顺序。从离散的角度理解含参变量积分的定积分公式，我们对式(9)左右对参数$y$求偏导数：

$$I'(y) \approx \sum_{n=1}^{N} g'_n(y) \approx \int_a^b g'_y(x,y)\mathrm{d}x. \tag{13}$$

含参变量积分的求导定理可以用于含参变量积分$I(y)$显式表达式的计算，我们来看一个例题：

**例 2.** 计算含参变量积分$I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(y^2\sin^2 x + \cos^2 x\right)\mathrm{d}x$，其中参数$y \in (0,+\infty)$。（注：如果$y=0$，积分$I(y)$是瑕积分，我们忽略这种情况）

分析：对于给定的$y$，由于被积函数$\ln\left(y^2\sin^2 x + \cos^2 x\right)$的原函数不是初等函数，我们无法计算含参变量积分$I(y)$。由此，我们转为计算含参变量积分$I'(y)$，此时被积函数$\ln\left(y^2\sin^2 x + \cos^2 x\right)$关于参数$y$的偏导数的积分是可以计算的。

*Proof.* 定义二元函数$g(x,y) = \ln\left(y^2\sin^2 x + \cos^2 x\right)$，计算关于参数$y$的偏导数

$$g'_y(x,y) = \frac{2y\sin^2 x}{y^2\sin^2 x + \cos^2 x}. \tag{14}$$

显然，函数$g(x,y)$和$g'_y(x,y)$在矩形$[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,+\infty)$连续，应用求导定理

$$I'(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'_y(x,y)\mathrm{d}x=2y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{y^2\sin^2 x+\cos^2 x}\mathrm{d}x=2y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2 x}{y^2\tan^2 x+1}\mathrm{d}x. \tag{15}$$

用换元$t=\tan x$计算定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2 x}{y^2\tan^2 x+1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+y^2t^2)} \tag{16}$$

当$y\neq 1$时应用有理分式积分法

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+y^2t^2)} &= \frac{1}{y^2-1}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+y^2t^2}\right)\\ &= \frac{1}{y^2-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2y}\right)=\frac{\pi}{2y(y+1)},\quad y\neq 1.\end{aligned} \tag{17}$$

实际上不难验证，当$y=1$时有

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^2)}=\frac{\pi}{4}. \tag{18}$$

由此$I'(y)=\frac{\pi}{y+1}$对一切$y>0$成立。因此我们可以写出

$$I(y)=\pi\ln(y+1)+C, \tag{19}$$

其中$C$为常数。注意到当$y=1$时有$I(1)=0$，所以参数$C=-\ln 2$，由此$I(y)=\pi\ln\frac{y+1}{2}$。 □

作为本节结尾，我们讨论含参变量变限积分的求导问题。依然设$g(x,y)$在矩形$[a,b]\times[c,d]$上连续，函数$u(y)$和$v(y)$是在$[c,d]$定义且取值于$[a,b]$的函数，含参变量变限积分形如

$$I(y)=\int_{u(y)}^{v(y)} g(x,y)\mathrm{d}x. \tag{20}$$

如果$u(y),v(y)$都可导，且$g(x,y)$对参数$y$存在偏导数，则$I(y)$也可导。求导公式是通过链式法则推导的：考虑三元函数

$$F(y,u,v)=\int_u^v g(x,y)\mathrm{d}x. \tag{21}$$

那么可以将$I(y)$写成复合函数$I(y)=F(y,u(y),v(y))$。然后计算偏导数

$$\begin{aligned}I'(y) &= \frac{\partial F}{\partial u}(y,u(y),v(y))u'(y)+\frac{\partial F}{\partial v}(y,u(y),v(y))v'(y)+\frac{\partial F}{\partial y}(y,u(y),v(y))\\ &= -g(u(y),y)u'(y)+g(v(y),y)v'(y)+\int_{u(y)}^{v(y)} g'_y(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{22}$$

对比含参变量积分的求导公式(13)，由于积分上下限依赖参数$y$，因此导数$I'(y)$多出了与上下限相关的两项。我们指出，导数$I'(y)$必须是只含$y$一个自变量的函数，所以$I'(y)$的表达式不可以出现$u,v$等其他名字的自变量。

**例 3.** 设$y>0$，设$g(y)=\int_0^{y^2}\frac{\ln(1+xy)}{x}\mathrm{d}x$，求$g'(y)$。

分析：本题为标准的含参变量变限积分的求导问题，记$h(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{x}$。显然$h(x,y)$关于自变量$x$的偏导数无法计算，即我们无法得到$g(y)$的显式表达式，因此需要套公式(22)即可。需要注意的是，对内层二元函数$\frac{\ln(1+xy)}{x}$求导时，是对参数$y$求偏导。当我们得到关于偏导数的积分式$\int_0^{y^2}h'_y(x,y)$，如果积分可以计算，需要算出来。

*Proof.* 记$h(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{x}$，首先计算偏导数

$$h'_y(x,y)=\frac{1}{1+xy}. \tag{23}$$

代入公式(22)

$$\begin{aligned}
g'(y) &= 2yh(y^2,y)+\int_0^{y^2}h'_y(x,y)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\ln\left(1+y^3\right)}{y}+\int_0^{y^2}\frac{\mathrm{d}x}{1+xy} \\
&= \frac{2\ln\left(1+y^3\right)}{y}+\left.\frac{\ln(1+xy)}{x}\right|_{x=0}^{x=y^2} \\
&= \frac{2\ln\left(1+y^3\right)}{y}+\frac{\ln\left(1+y^3\right)}{y^2}-y. 
\end{aligned} \tag{24}$$

我们需要指出，第三个等号计算定积分$\int_0^{y^2}\frac{\mathrm{d}x}{1+xy}$时（注：此积分实为瑕积分但不影响使用原函数计算），我们需要计算原函数$\frac{1}{1+xy}$关于自变量$x$的原函数$\frac{\ln(1+xy)}{x}$，这与被积函数$h(x,y)$有所不同；第四个等号需要计算原函数$\frac{\ln(1+xy)}{x}$在$x=0$处取值，用极限代替

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+xy)}{x}=y. \tag{25}$$

□

## 1.2 含参变量无穷积分

### 含参变量无穷积分及其一致收敛的定义和理解

假定二元函数$g(x,y)$在矩形$[1,+\infty)\times[c,d]$定义，对于给定的$y\in[c,d]$，关于自变量$x$的无穷积分收敛且

$$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x. \tag{26}$$

得到的积分值$I(y)$是关于自变量$y$的函数，称为**含参变量无穷积分**，含参变量积分的自变量$y$被称为**参数**。

模仿含参变量正常积分的研究方式，我们自然希望可以将$g(x,y)$关于$y$的连续、可导和积分等性质可以传递给函数$I(y)$。然而遗憾的是，由于$I(y)$是无穷积分，研

究$I(y)$的性质会有些复杂。我们提供一种理解视角：对于给定参数$y$，可以将无穷积分离散为数项级数

$$I(y)=\int_1^{+\infty} g(x,y)\mathrm{d}x \approx \sum_{n=1}^{\infty} g(n,y)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(y), \tag{27}$$

其中我们记$g_n(y)=g(n,y)$为固定$n$以$y$为自变量的一元函数。在这种离散下，我们将含参变量广义积分$I(y)$近似为函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(y)$的极限函数。由于每一个$g_n(y)$都是连续的，那么得出极限函数$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(y)$连续的先决条件是函数项级数的一致收敛。类似地，当我们想研究含参变量无穷积分$I(y)$接收到$g(x,y)$所具有的性质，就必须在每一个无穷积分$\int_1^{+\infty} g(x,y)\mathrm{d}x$对给定$y$收敛的基础上，定义类似的"一致收敛"性质。

了解了"一致收敛"定义的必要性，我们下面模仿函数项级数的一致收敛来定义含参变量无穷积分的一致收敛，我们指出两种"一致收敛"的实质都是"收敛队形统一"。对于给定参数$y$，我们将无穷积分写成极限形式

$$I(y)=\lim_{X\to\infty}\int_1^{X} g(x,y)\mathrm{d}x, \quad \forall y\in[c,d]. \tag{28}$$

虽然上述函数极限是在$y\in[c,d]$逐点成立的，但是对于不同$y$极限收敛速度并不统一。我们定义含参变量积分的**一致收敛**如下：如果对于$\forall\varepsilon>0$，存在与参数$y$无关的常数$X_0$，使得对一切$y\in[c,d]$都有

$$\left|\int_X^{+\infty} g(x,y)\right| = \left|I(y)-\int_1^{X} g(x,y)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \quad \forall X>X_0 \tag{29}$$

对于含参变量无穷积分$\int_1^{+\infty} g(x,y)\mathrm{d}x$来说，积分变量$x$相当于扮演了函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(y)$一致收敛定义中脚标$n$的定义，参数$y$相当于扮演了函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(y)$一致收敛定义中函数自变量$y$的定义。从这一视角看，两种"一致收敛"的定义是完全一致的。

下面我们从几何意义的角度对含参变量无穷积分的一致收敛做出解释：如图所示，当$X>X_0$时，对一切$y\in[c,d]$，正常积分$X>X_0$后，积分在各个点$y\in[c,d]$有较为"整齐"的"收敛队形"。

模仿函数项级数的一致收敛，我们也可以给出含参变量无穷积分一致收敛的柯西准则

**定理 5.** 设二元函数$g(x,y)$在矩形$[1,+\infty)\times[c,d]$定义且无穷积分$I(y)=\int_1^{+\infty} g(x,y)\mathrm{d}x$对一切$y\in[c,d]$收敛，那么无穷积分$I(y)=\int_1^{+\infty} g(x,y)\mathrm{d}x$在$[c,d]$一致收敛的充分必要条件是，对$\forall\varepsilon>0$，存在与参数$y$无关的常数$X_0$，使得对一切$y\in[c,d]$都有

$$\left|\int_{X_1}^{X_2} g(x,y)\right| < \varepsilon, \quad \forall X_2>X_1>X_0 \tag{30}$$

## 含参变量无穷积分一致收敛性的判别

给定含参变量无穷积分$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$，我们自然不能期望只提供定义和柯西准则就判别其一致收敛与否。我们这一节就给出判断含参变量无穷积分的特定方法。与此前类似，判断含参变量无穷积分一致收敛和不一致收敛的方法是不同的。

模仿函数项级数的强级数判别法（大M判别法），我们也可以给出含参变量无穷积分的大M判别法

**定理 6.** 设二元函数$g(x,y)$在矩形$[1,+\infty)\times[c,d]$定义且无穷积分$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$对一切$y\in[c,d]$收敛，如果存在定义在$[a+\infty)$的函数$M(x)$使得$|g(x,y)|\le M(x)$对一切$(x,y)\in[1,+\infty)\times[c,d]$成立，且无穷积分$\int_1^{+\infty}M(x)\mathrm{d}x$收敛，那么无穷积分$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$在$[c,d]$一致收敛。

对比函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}g_n(y)$的强级数判别法，我们是找收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty}M_n$满足$|g_n(y)|\le M_n$对一切$y$成立。将函数项级数的脚标$n$替换为自变量$x$，我们要寻找的是控制二元函数$g(x,y)$的收敛函数$M(x)$。在这个视角下，两个判别法是一致的。

含参变量无穷积分的不一致收敛的判别法并不像函数项级数那样简单，没有特别好的技巧，我们一般只能使用定义的逆否命题判别：

**定理 7.** 设二元函数$g(x,y)$在矩形$[1,+\infty)\times[c,d]$定义且无穷积分$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$对一切$y\in[c,d]$收敛，如果存在积分下限序列$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$满足$\lim_{n\to+\infty}X_n=+\infty$和参数序列$\{y_n\}\in[c,d]$使得$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{X_n}^{+\infty}g(x,y_n)\mathrm{d}x\right|$非*0*（序列发散或收敛极限非*0*），那么无穷积分$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$在$[c,d]$不一致收敛。

直观来看，不一致收敛性的判别还是通过寻找“害群之马”的思路进行。对于每一个$n$，如果我们找到一个积分下限$X_n$即对应的参数取值$y_n\in[c,d]$，计算积分值

$$I_n=\left|\int_{X_n}^{+\infty}g(x,y_n)\mathrm{d}x\right|=\left|I(y_n)-\int_1^{X_n}g(x,y_n)\mathrm{d}x\right|. \tag{31}$$

如果$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$一致收敛，那么积分$I_n$理应随着积分下限$X_n$的增大而收敛于0。如果$I_n$极限不是0，说明当确定积分下限$X_n$时，存在拖慢含参变量无穷积分$\int_1^{X_n}g(x,y)\mathrm{d}x$向$I(y)$收敛的参数取值$y_n$，这将破坏含参变量积分的整体收敛队形。

实际上，寻找$X_n$和$y_n$的过程通常比较复杂，上述定理的直接使用也颇为困难。因此证明不一致收敛的问题通常并不容易。下面的例题采用换元的想法构造$X_n$和$y_n$，是需要掌握的。

**例 4.** 设参数$d>c>0$，那么

***1.***在区间$y\in[c,d]$证明含参变量无穷积分$I(y)=\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$一致收敛。

***2.***在区间$y\in(0,d]$证明含参变量无穷积分$I(y)=\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$不一致收敛。

分析：一致收敛的证明是直接使用大M判别法，难度不大比较标准。不一致收敛的证明则是使用换元的方法构造破坏收敛速度的积分下限$X_n$和参数$y_n$，主题思路是通过换元的方法研究$\int_X^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$的值，以证明极限非零。由于证明不一致收敛的题目难度较大，只掌握本题和课本的例题足够。

*Proof.* **1.**使用大M判别法：对于任意$y \in [c,d]$有

$$\left|y\mathrm{e}^{-xy}\right| \leq d\mathrm{e}^{-cx}. \tag{32}$$

我们注意到无穷积分$\int_1^{+\infty} d\mathrm{e}^{-cx}\mathrm{d}x$收敛，所以无穷积分$I(y) = \int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$在区间$y \in [c,d]$一致收敛。

**2.**使用定理7的方法。给定积分下限$X > 1$，对积分$\int_X^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$使用换元$t = xy$得

$$\left|\int_X^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\right| = \int_X^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x = \int_{yX}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{33}$$

对于给定$X > 1$我们有

$$\lim_{y\to 0+0} \int_{yX}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1. \tag{34}$$

根据上述分析，取$X_n = n$，然后取足够接近0的$y_n$使得积分

$$\left|\int_{X_n}^{+\infty} y_n\mathrm{e}^{-xy_n}\mathrm{d}x\right| = \int_{y_nX_n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t > \frac{1}{2}. \tag{35}$$

由于对于给定$X_n$极限(34)成立，所以$y_n$的选取合理。因此对于上述选取的$X_n$和$y_n$，积分序列$\left|\int_{X_n}^{+\infty} y_n\mathrm{e}^{-xy_n}\mathrm{d}x\right|$极限不是0。根据定理7，积分不一致收敛。 □

## Dirichlet-Abel判别法

与函数项级数一致收敛的Dirichlet-Abel判别法类似，如果我们能将含参变量无穷积分写成

$$I(y) = \int_1^{+\infty} a(x,y)b(x,y)\mathrm{d}x, \tag{36}$$

我们可以通过$a(x,y)$和$b(x,y)$各自具有的性质来判断$I(y)$的一致收敛性。我们将判别要求整理在表格里。

针对上述判别法，我们给出一些要点释疑

- 应用Dirichlet判别法和Abel判别法判别$I(y) = \int_1^{+\infty} g(x,y)\mathrm{d}x$收敛性首先要设法拆分$g(x,y) = a(x,y)b(x,y)$。
- Abel判别法比Dirichlet判别法对$b(x,y)$要求更高，但对$a(x)$要求更低，因此结论是相同的。从证明来看，两个判别法都应用了Abel变换，因此是等价的。

| | Dirichlet判别法 | Abel判别法 |
|---|---|---|
| $a(x,y)$ | **1.**固定$y\in[c,d]$时，$a(x,y)$关于$x$单调<br>**2.**当$x\to+\infty$时$a(x,y)$一致收敛于0 | **1.**固定$y\in[c,d]$时，$a(x,y)$关于$x$单调<br>**2.**$a(x,y)$关于$y\in[c,d]$一致有界 |
| $b(x,y)$ | $\int_1^X b(x,y)\mathrm{d}x$关于$y\in[c,d]$一致有界 | $\int_1^{+\infty} b(x,y)\mathrm{d}x$一致收敛 |
| 结论 | $I(y)=\int_1^{+\infty} a(x,y)b(x,y)\mathrm{d}x$一致收敛 | $I(y)=\int_1^{+\infty} a(x,y)b(x,y)\mathrm{d}x$一致收敛 |

- 我们此前给出过以$[c,d]$为定义域函数序列$\{a_n(y)\}$一致有界的定义，是指存在界$M>0$使得$|a_n(y)|<M$对一切$n\in\mathbb{N}^*$和$y\in[c,d]$成立；将函数序列一致有界定义中的$n$替换为$x$（或$X$），我们将得到$a(x,y)$（或$\int_1^X b(x,y)\mathrm{d}x$）一致有界的定义：存在界$M>0$使得$|a(x,y)|<M$（或$\left|\int_1^X b(x,y)\mathrm{d}x\right|<M$）对一切$x>1$（或$X>1$）和$y\in[c,d]$成立。

- 类似地，我们也可以根据函数序列$\{a_n(y)\}$一致收敛于0的定义推广处函数$a(x,y)$在$x\to+\infty$时一致收敛于0的定义，推广的方式依然是将定义中的$n$替换为$x$：对$\forall\varepsilon>0$，存在$X>1$使得$|a(x,y)|<\varepsilon$对一切$x>X$和$y\in[c,d]$成立。

Dirichlet-Abel判别法最重要的应用在Dirichlet积分，我们将在下一节专门讨论。除此之外，由于假设过于复杂，Dirichlet-Abel判别法是很难使用的，通常只对几类比较简单的$a(x,y)$和$b(x,y)$应用，例如

- 当$b(x,y)=b(x)$，即与自变量$y$无关时，含参变量积分$\int_1^{+\infty} b(x,y)\mathrm{d}x$一致收敛相当于无穷积分$\int_1^{+\infty} b(x)\mathrm{d}x$收敛，是容易验证的，使用Abel判别法非常方便。

- 当$b(x,y)=\sin xy$（或$b(x,y)=\cos xy$类似），其中$y\in[c,d]$且参数$d>c>0$，积分$\left|\int_1^X \sin xy\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{\cos y-\cos Xy}{y}\right|\le\frac{2}{c}$关于$y$一致有界，此时使用Dirichlet判别法非常方便。

**例 5.** 使用*Dirichlet-Abel*判别法证明下列两个含参变量无穷积分一致收敛
***1.***$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$，其中$y\in[c,+\infty)$，参数$c>0$。
***2.***$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中$y\in[0,+\infty)$。

分析：第一问中存在项$\sin xy$，考虑用Dirichlet判别法；第二问中无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$收敛，考虑使用Abel判别法。

*Proof.* **1.**取$b(x,y)=\sin xy$，那么$a(x,y)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$。显然有$\int_1^X b(x,y)\mathrm{d}x$关于$y\in[c,+\infty)$一致有界，我们还需要验证$a(x,y)$满足Dirichlet判别法的条件。

注意到$a(x,y)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$与$y$无关，因此根据$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}=0$就有$a(x,y)$一致收敛于0；此外$a(x,y)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$关于$x$单调递减，使用$a(x,y)$满足Dirichlet判别法的条件，由此$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$一致收敛。

**2.**取$b(x,y)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$，那么$a(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$。用无穷积分的Dirichlet判别法，部分积分$\int_1^X \cos x\mathrm{d}x$有界而$\frac{1}{\sqrt{x}}$单调递减收敛于0，所以无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$收敛收敛。由于$b(x,y)$不依赖自变量$y$，所以含参变量积分$\int_0^{+\infty}b(x,y)\mathrm{d}x$一致收敛。我们还需要验证$a(x,y)$满足Abel判别法的条件。

对于给定的$y\geq 0$，函数$a(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$显然单调递减，且$|\mathrm{e}^{-xy}|\leq 1$对一切$x,y\geq 0$，因此$a(x,y)$一致有界，满足Abel判别法的条件，由此$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$一致收敛。 □

## 含参变量无穷积分的性质

类比函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}g_n(y)$，对含参变量无穷积分$I(x)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$，我们也可以将$g(x,y)$的连续性、导数、积分等性质传达给极限$I(x)$。这些定理形式上与含参变量正常积分的性质传递定理类似，但是需要含参变量无穷积分的一致收敛假设。

首先是连续性的传递

**定理 8.** 如果$g(x,y)$在矩形$[1,+\infty)\times[c,d]$上连续，且含参变量无穷积分$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$对$y\in[c,d]$一致收敛，那么$I(y)$在$[c,d]$连续。

接下来是定积分的传递

**定理 9.** 如果$g(x,y)$在矩形$[1,+\infty)\times[c,d]$上连续（注：连续蕴含可积），且含参变量无穷积分$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$对$y\in[c,d]$一致收敛，那么$I(y)$在$[c,d]$上可积，定积分值满足

$$\int_c^d I(y)\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\left(\int_c^d g(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \tag{37}$$

直观来看，式(37)非常接近累次积分的换序，不同点上式(37)是将含参变量无穷积分的正常积分换序为含参变量正常积分的无穷积分，并且式(37)成立的前提要求$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$对$y\in[c,d]$一致收敛。

定积分传递定理9的应用是复杂无穷积分的计算，即首先将无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$写成累次积分$\int_1^{+\infty}\left(\int_c^d g(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$的形式，再借助式(37)对积分换序计算。例如课本例题要求计算

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\mathrm{d}x, \tag{38}$$

其中$b>a>0$。被积函数的分子类似牛顿莱布尼茨公式原函数向减的形式，我们由此构造

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}y=-\left.\frac{\mathrm{e}^{-x^2y}}{x^2}\right|_{y=a}^{y=b}=\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}, \tag{39}$$

然后根据式(37)更换积分顺序

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y, \tag{40}$$

此时内层无穷积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}x$是可以显式计算的。值得注意的是，上述积分换序成立的前提是含参变量无穷积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}x$在$y\in[a,b]$一致收敛，这一证明直接使用大M判别法即可。

下面的例题也是上述计算方法的实践，并结合了上一章无穷积分换元法的思路：

**例 6.** 设参数$a>0$，利用积分$\int_0^a\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}=\frac{\arctan(ax)}{x}$，计算无穷积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(ax)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$。

分析：利用题面的提示，可以将被积函数$\frac{\arctan(ax)}{x(1+x^2)}$写成积分的形式，然后更换积分顺序计算。不过值得注意的是被积函数中多出来的$1+x^2$的项的处理方法。

*Proof.* 利用积分$\int_0^a\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}=\frac{\arctan(ax)}{x}$，我们将被积函数写成

$$\frac{\arctan(ax)}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^a\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}\right)=\int_0^a\frac{\mathrm{d}y}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2y^2\right)}. \tag{41}$$

然后

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(ax)}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^a\frac{\mathrm{d}y}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2y^2\right)}\right)\mathrm{d}x. \tag{42}$$

我们希望根据式(37)积分换序

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^a\frac{\mathrm{d}y}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2y^2\right)}\right)\mathrm{d}x=\int_0^a\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2y^2\right)}\right)\mathrm{d}y. \tag{43}$$

然而式(43)需要证明含参变量无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$在$y\in[0,a]$一致收敛，这一证明使用大M判别法

$$\left|\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2y^2\right)}\right|\le\frac{1}{1+x^2}, \tag{44}$$

而$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$收敛。于是式(43)成立。

接下来我们要计算无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$。当$y\neq1$时，被积函数$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$原函数可以计算

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2y^2\right)}=\frac{y^2}{y^2-1}\left(\frac{1}{1+x^2y^2}-\frac{1}{y^2+x^2y^2}\right). \tag{45}$$

由此

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2y^2\right)} &= \frac{y^2}{y^2-1}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2y^2}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{y^2+x^2y^2}\right]\\ &= \frac{y^2}{y^2-1}\left(\frac{\pi}{2y}-\frac{\pi}{2y^2}\right)=\frac{\pi}{2(y+1)}.\end{aligned} \tag{46}$$

当$y=1$时不难计算$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{4}$，所以对一切$y>0$有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}=\frac{\pi}{2(y+1)}. \tag{47}$$

代入式(43)得

$$I=\int_0^a\frac{\pi}{2(y+1)}\mathrm{d}y=\frac{\pi\ln(1+a)}{2}. \tag{48}$$

□

最后是可导性和导数的传递

**定理 10.** 如果$g(x,y)$和偏导数$g'_y(x,y)$在矩形$[1,+\infty)\times[c,d]$上连续，含参变量积分$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$逐点收敛，且含参变量无穷积分$\int_1^{+\infty}g'_y(x,y)\mathrm{d}x$对$y\in[c,d]$一致收敛，那么$I(y)$在$[c,d]$上可导，并且

$$I'(y)=\int_1^{+\infty}g'_y(x,y)\mathrm{d}x. \tag{49}$$

与函数项级数可导性传递定理类似，含参变量无穷积分$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$并不需要本身的一致收敛，而是需要偏导数含参变量无穷积分$\int_1^{+\infty}g'_y(x,y)\mathrm{d}x$一致收敛。

可导性传递的应用与含参变量正常积分很类似，对于某个无法显式计算的无穷积分$I(y)=\int_1^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$，我们可以通过计算偏导数积分$I'(y)=\int_1^{+\infty}g'_y(x,y)\mathrm{d}x$，然后由$I'(y)$反推出$I(y)$。这一思路最重要的应用是Dirichlet积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$的计算，在下一节我们会详细讨论。这一部分我们给出另一个例题，其思路也是通过计算$I'(y)$得出$I(y)$。

**例 7.** 计算含参变量无穷积分$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$的显式表达式，其中$y\in[0,+\infty)$。

分析：在例5中我们曾通过Dirichlet判别法证明$I(y)$在$y\in[c,+\infty)$一致收敛，其中$c>0$是一切常数，根据连续性的传递我们自然得到$I(y)$在$[c,+\infty)$连续。在此基础上，我们通过显式计算$I'(y)$的方式反推$I(y)$。

*Proof.* 记被积函数$g(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\frac{\sin xy}{x}$，那么偏导数$g'_y(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin xy$，我们需要含参变量积分$\int_0^{+\infty}g'_y(x,y)\mathrm{d}x$的一致收敛以确保$I(y)$可导。我们有

$$\left|\mathrm{e}^{-x}\sin xy\right|\le\mathrm{e}^{-x}, \tag{50}$$

而无穷积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$收敛，所以含参变量积分$\int_0^{+\infty}g'_y(x,y)\mathrm{d}x$一致收敛。根据求导法则

$$I'(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin xy\mathrm{d}x. \tag{51}$$

在上册的不定积分讲义中，我们曾经研究过形如$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$和$\int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x$，方法是分部积分法。当$y > 0$时，我们对$I'(y)$沿用分部积分

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin xy \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{y} \cos xy \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{1}{y} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \cos xy \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \mathrm{e}^{-x} \sin xy \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{1}{y^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin xy \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin xy \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{52}$$

其中使用了$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{y} \cos xy = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{y^2} \sin xy = 0$。求解得到

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin xy \mathrm{d}x = \frac{y}{y^2+1}. \tag{53}$$

结合$I'(0) = 0$，我们得到$I'(y) = \frac{y}{y^2+1}$，根据不定积分

$$\int \frac{y}{y^2+1} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \ln\left(y^2+1\right) + C. \tag{54}$$

又$I(y)$在$[0, +\infty)$可导因而连续，且代入知$I(0) = 0$，由此$C = 0$，得到$I(y) = \frac{1}{2} \ln\left(y^2+1\right)$。

□

### 1.3 一些专题讨论

研究含参变量积分的主要作用是计算复杂定积分（特别是无穷积分）的值，其中首当其冲的就是上一章讨论的Gauss积分$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$和接下来要讨论的Dirichlet积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$。其中Dirichlet积分体现了含参变量积分计算复杂定积分的基本思路：构造一个与Dirichlet积分相近的含参变量积分，然后利用含参变量积分的工具写出积分的表达式，最后代入得出积分的值。此外，本节涉及的$\Gamma$函数和$B$函数也是两类重要的含参变量积分，他们有着丰富的含义，在计算积分值是有特殊价值。

本节我们首先系统介绍Dirichlet积分的计算方法，然后介绍$\Gamma$函数和$B$函数的相关应用，最后对各种复杂定积分和无穷积分的方法进一步总结。

#### Dirichlet积分

Dirichlet积分是指

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}. \tag{55}$$

被积函数$\frac{\sin x}{x}$虽然在$x = 0$没有定义，但是$\lim_{x\to0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$说明被积函数有界，所以$x = 0$不是瑕点。Dirchlet积分作为无穷积分的收敛性可以用Dirichelt判别法直接证明。

历史上Dirichlet积分的值在热方程、傅里叶分析等领域有很多应用，人们也研究了多种计算Dirichlet积分的方法。在高等数学的范畴里，我们只需要掌握含参变量无穷积分的计算方法。

计算Dirichlet积分的方法是构造一个含参变量无穷积分

$$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x. \tag{56}$$

取定$y=0$时上述含参积分等于Dirichlet积分，即$I(0)=I$。乘上的函数$\mathrm{e}^{-xy}$称为**收敛因子**，因为乘上这一因子得到的含参变量积分$I(y)$对$y\in[0,+\infty)$是一致收敛的。一致收敛的证明方法是通过Abel判别法，思路与例题5的第二问类似：取$a(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$和$b(x,y)=\frac{\sin x}{x}$，可以证明$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$一致收敛（不依赖自变量$y$）和$\mathrm{e}^{-xy}$关于$x$单调且一致有界。由此$I(y)$对$y\in[0,+\infty)$是一致收敛的，我们也可以得出$I(y)$在$[0,+\infty)$连续的结论。

我们的主题思路与例7完全一致：通过计算$I'(y)$来反推$I(y)$，$I'(y)$的计算方式也是通过含参变量无穷积分的求导公式(49)。但是具体细节比例7更加复杂。

我们首先不难验证$I(y)$是逐点收敛的，我们还需要验证偏导数的含参变量积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$是一致收敛的：对参数$c>0$，对$y\in[c,+\infty)$讨论$\int_0^{+\infty}-\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$的一致收敛性，利用大M判别法

$$\left|\mathrm{e}^{-xy}\sin x\right|\le\mathrm{e}^{-cx}, \tag{57}$$

而$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-cx}\mathrm{d}x$收敛，所以含参变量无穷积分$\int_0^{+\infty}-\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$对$y\in[c,+\infty)$一致收敛，进一步$I(y)$在$[c,+\infty)$可导。从这里可以看到，收敛因子对于偏导数含参变量积分的作用确保了一致收敛性。

考虑到$c$的任意性，且可导是逐点定义的，我们得到$I(y)$在$(0,+\infty)$的可导性，并且

$$I'(y)=\int_0^{+\infty}-\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x,\quad y>0. \tag{58}$$

利用类似例题7的分部积分法，可以计算出$I'(y)=-\frac{1}{1+y^2}$，所以

$$I(y)=-\arctan y+C,\quad y>0, \tag{59}$$

其中$C$为参数。那么如何计算参数$C$呢？我们使用夹逼原理估算$I(y)$的值：对$y>0$有

$$0\le|I(y)|\le\int_0^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x\le\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\le\frac{1}{y}, \tag{60}$$

取$y\to+\infty$有$\lim_{y\to+\infty}I(y)=0$。考虑到表达式$I(y)=-\arctan y+C$，解得$C=\frac{\pi}{2}$。因此

$$I(y)=-\arctan y+\frac{\pi}{2},\quad y>0. \tag{61}$$

最后借助$I(y)$在点$y=0$的连续性，得到$I(0)=\frac{\pi}{2}$。

我们将Dirichlet积分的计算思路总结如下

**1.**构造含收敛因子的积分$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$。

**2.**利用定理10写出导数$I'(y)=\int_0^{+\infty}-\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$对$y>0$成立。

**3.**根据$I'(y)=\arctan y$反推$I(y)=-\arctan y+C$对$y>0$成立。

**4.**利用夹逼原理(60)得出常数$C=\frac{\pi}{2}$。

**5.**利用$I(y)$在$y=0$的连续性计算出$I(0)=\frac{\pi}{2}$。

在Dirichlet积分基础上做换元可以得到广义Dirichlet积分：对$a>0$，做换元$t=ax$得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}. \tag{62}$$

如果$a<0$，利用正弦函数的奇函数性质

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}. \tag{63}$$

对于一些复杂的无穷积分，我们可以将其转化为Dirichlet积分，利用Dirichlet积分的值计算其值：

**例 8.** 计算无穷积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$。

分析：将复杂积分化为经典积分（Gauss积分/Dirichlet积分）是十分典型的处理方法，转化的过程通常使用分部积分或换元法。

*Proof.* 注意到$\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)$，利用分部积分法

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\left.\frac{\sin^2 x}{x}\right|_{x=0}^{x=+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x. \tag{64}$$

由于$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin^2 x}{x}=0$，因此利用广义Dirichlet积分公式(62)得到

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \tag{65}$$

□

## $\Gamma$函数和$B$函数

$\Gamma$函数和$B$函数是两类特殊的含参变量广义积分，许多复杂积分都可以转换为$\Gamma$函数和$B$函数的形式，然后根据$\Gamma$函数和$B$函数特有的计算公式计算其值。

$\Gamma$函数是指下述含参变量积分：参数$a>0$有

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x. \tag{66}$$

当$a < 1$时，$x = 0$是$\Gamma(a)$的瑕点，此时$\Gamma(a)$是无穷瑕积分；当$a \geq 1$时，$x = 0$不是$\Gamma(a)$的瑕点。

对于大多数$a$，$\Gamma(a)$都不可以直接算出来，但是我们可以通过分部积分法推导$\Gamma(a)$的递推式

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),\ a > 0. \tag{67}$$

借助$\Gamma(1) = 1$，我们很容易推出$a$为正数时$\Gamma(a)$的值

$$\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}. \tag{68}$$

另一个重要的$\Gamma$函数值为$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$，其值可以通过Gauss 积分计算

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}, \tag{69}$$

其中第二个等式利用了换元$t = \sqrt{x}$。利用递推式(67)，我们还可以计算出$\Gamma$函数在半整数处的取值，如$\Gamma(\frac{3}{2}), \Gamma(\frac{5}{2})$等。

对于其他$\Gamma$函数的取值，如$\Gamma(\frac{3}{4})$等，我们都不能直接计算其取值。但是由于$\Gamma$函数在实际应用的重要性，很多积分最终都会化成$\Gamma$函数的形式，因此不少工程书籍的附录会设置$\Gamma$函数值表，提供$\Gamma$函数值的近似值以供查找。

$B$函数是指下述含参变量积分：参数$p, q > 0$有

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x. \tag{70}$$

当$p < 1$时，$x = 0$是$B$函数瑕点；当$q < 1$时，$x = 1$是$B$函数瑕点。

当$p, q$是正整数时，$B(p,q)$被积函数为多项式，所以积分值显然可以直接计算。当$p, q$不是整数时，$B(p,q)$的值通常无法计算。与$\Gamma$函数的递推公式类似，我们也可以得到$B$函数的重要公式：首先是对称公式，借助定积分换元法很容易验证

$$B(p,q) = B(q,p), \tag{71}$$

另一个则是建立$B$函数和$\Gamma$函数关系的公式

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{72}$$

如上所述，$\Gamma$函数和$B$函数在实际计算中的应用是将复杂的积分通过换元或分部积分转化为$\Gamma$函数或$B$函数的形式，然后利用递推公式(67)或转换公式(72)计算$\Gamma$函数或$B$函数的值。如下述例题：

**例 9.** 计算下列两个广义积分的值

***1.*** $I_1 = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$

***2.*** $I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}.$

分析：两个积分都可以直接写成$\Gamma$函数或$B$函数的形式，利用递推公式(67)或转换公式(72)计算其值。另一方面，这类问题通常也可以绕过$\Gamma$函数或$B$函数的形式的方法解答。

*Proof.* **1.**【方法1：用$\Gamma$函数】利用递推公式

$$I_1=\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{73}$$

【方法2：利用换元法和分部积分】先用换元$t=\sqrt{x}$化简被积函数

$$I_1=\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t. \tag{74}$$

再用分部积分法将上述积分转化为Gauss积分

$$2\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=-\,t\mathrm{e}^{-t^2}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{75}$$

**2.**【方法1：用$B$函数】利用转换公式(72)

$$I_2=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=\pi. \tag{76}$$

【方法2：利用换元法】为了化简被积函数分母的根号，使用换元$x=\sin^2 t$得

$$I_2=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\sin t\cos t}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\pi. \tag{77}$$

□

## 复杂积分的计算总结

这两节中，我们学习了许多计算复杂定积分或广义积分值的方法，这些方法借助了我们学习的广义积分和含参变量积分等知识。我们这里对散落在这两章的诸多技巧进行总结。

1. **利用常规方法计算广义积分** 这里的常规方法主要是指广义积分的牛顿莱布尼茨公式、换元法和分部积分法，其形式和思路与正常积分的情形一致，只需要在无穷点和瑕点做出简单处理即可。在广义积分讲义中我们有详细说明，重要例题包括：$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x$，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$和$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$等。
2. **转化为Gauss积分或Dirichlet积分** 使用换元法或分部积分法将原本积分转化为Gauss积分或Dirichlet积分计算的方法，重要例题包括$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$和$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$等。

3. **借助含参变量积分求导法则** 这类问题计算的对象为含参变量积分$I(y)=\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x$，其中积分上限$b$可以取无穷积分，对应情况即为含参变量无穷积分。这类问题通常通过计算$I'(y)=\int_a^b g_y'(x,y)\mathrm{d}x$，然后由$I'(y)$反推出$I(y)$。值得注意的是，当$I(y)$为含参变量无穷积分时，$I'(y)$的计算依赖$\int_a^b g_y'(x,y)\mathrm{d}x$的一致收敛性（定理10），需要提前验证。重要例题包括本章讲义的例题2、例题7和Dirichlet积分的计算方法。

4. **借助含参变量无穷积分的积分换序法则** 这类问题计算对象为无穷积分$I=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，且$f(x)$的分子常常有减法形式。通过将$f(x)$写成$f(x)=\int_c^d g(x,y)\mathrm{d}y$的方法，我们应用积分换序的方法
$$I=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_c^d g(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_0^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,\quad(78)$$
先计算内层含参变量无穷积分，后计算外层的正常积分。这类方法与我们在重积分一章学习的正常积分累次积分换序方法类似，只是需要检验含参变量无穷积分$\int_0^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x$的一致收敛性。经典例题包括课本习题$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\mathrm{d}x(b>a>0)$和例题6。

5. **利用$\Gamma$函数和$B$函数** 将复杂的积分写成$\Gamma$函数或$B$函数的形式，然后借助递推公式(67)或转换公式(72)计算$\Gamma$函数或$B$函数的值。主要例题是例题9。

# 2 扩展延伸

## 2.1 扩展题概览

扩展延伸题部分难度较大，建议根据题目内容选择性阅读。

- 扩展习题1：中等难度，加强对含参变量变限积分求导公式(22)的理解。
- 扩展习题2：中等难度，加强对含参变量无穷积分不一致收敛的分析能力。
- 扩展习题3：中等难度，加强对于递推公式(67)或转换公式(72)计算方法的理解。
- 扩展习题4：高等难度，较为复杂的定积分分析技巧。
- 扩展习题5：高等难度，含参变量无穷积分一致收敛柯西准则的应用。
- 补充习题1：中等难度，例题2解法的实践，计算量较大。
- 补充习题2：简单难度：例题9解法的实践。
- 补充习题3：中等难度，扩展习题3解法的实践。
- 补充习题4：中等难度，扩展习题4解法的实践。

## 2.2 扩展习题

**题 1.** 设函数$f(s,t)$在$\mathbb{R}^2$连续，设$F(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{d}s\int_s^x f(s,t)\mathrm{d}t$，求$F'(x)$。

分析：本题是双层的含参变量积分：外层是以$x$为参数，以$s$为积分变量的含参变量变限积分；内层是以$s,x$为参数，以$t$为积分变量的含参变量变限积分。

*Proof.* 定义内层的变限积分$G(s,x)=\int_s^x f(s,t)\mathrm{d}t$是以$s,t$为参数的二元含参变量变限积分，那么变限积分$F(x)=\int_x^{x^2}G(s,x)\mathrm{d}s$。我们根据公式计算

$$F'(x)=-G(x,x)+2xG(x^2,x)+\int_x^{x^2}G'_x(s,x)\mathrm{d}s. \tag{79}$$

根据定义$G(x,x)=0$，我们还要计算$G'_x(s,x)$。由于$G'_x(s,x)$是偏导数。我们固定自变量$s$对含参变量变限积分$G(s,x)=\int_s^x f(s,t)\mathrm{d}t$求导，此时被积函数$f(s,t)$与参数$x$无关，所以$G(s,x)=\int_s^x f(s,t)\mathrm{d}t$是关于$x$的变限积分，因此

$$G'_x(s,x)=f(s,x). \tag{80}$$

综上

$$F'(x)=2x\int_{x^2}^{x}f(x^2,t)\mathrm{d}t+\int_x^{x^2}f(s,x)\mathrm{d}s. \tag{81}$$

□

**题 2.** 设参数$A>0$，考虑含参变量无穷积分$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$，证明：
***1.***$I(y)$在$y\in[A,+\infty)$一致收敛。
***2.***$I(y)$在$y\in[0,+\infty)$不一致收敛。

分析：第一问的一致收敛可以用大M判别法轻易证明；第二问的不一致收敛比较麻烦，主题思路还是使用定理7的方法构造积分下限$X_n$和对应参数$y_n$，但是对于积分$\left|\int_{X_n}^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right|$的估计比较麻烦，这里我们采用直接计算积分$\int_{X_n}^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$值的方法。

*Proof.* **1.**用大M判别法

$$\left|\mathrm{e}^{-xy}\sin x\right|\le\mathrm{e}^{-Ax},\ x\in[0,+\infty),\ y\in[A,+\infty). \tag{82}$$

由于积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-Ax}\mathrm{d}x$收敛，所以$I(y)$在$y\in[A,+\infty)$一致收敛。

**2.**我们直接通过分部积分的方法计算部分积分$I_X(y)=\int_X^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$的值，方

法与例题7非常类似：

$$\begin{aligned}
I_X(y) &= \int_X^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{e}^{-xy}\cos x\Big|_{x=X}^{x=+\infty} - y\int_X^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\cos x\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{-Xy}\cos X + y\mathrm{e}^{-xy}\sin x\Big|_{x=X}^{x=+\infty} - y^2\int_X^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{-Xy}\left(\cos X - y\sin X\right) - y^2 I_X(z),
\end{aligned} \tag{83}$$

所以

$$I_X(y) = \frac{\mathrm{e}^{-Xy}\left(\cos X - y\sin X\right)}{y^2+1}. \tag{84}$$

根据定理7，为了得到不一致收敛的结论，我们需要构造积分下限$X_n$和对应参数$y_n$，使得$|I_{X_n}(y_n)|$值比较大，即$\lim_{n\to\infty} I_{X_n}(y_n)$不是0。我们取$X_n = 2n\pi$，此时$\sin X_n = 0$且

$$I_{X_n}(y) = \frac{\mathrm{e}^{-X_n y}}{y^2+1}. \tag{85}$$

再取$y_n = \frac{1}{X_n} \in (0,+\infty)$，那么

$$|I_{X_n}(y_n)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-1}}{y^2+1}\right| \geq \frac{1}{2\mathrm{e}}, \tag{86}$$

由此$\lim_{n\to\infty} I_{X_n}(y_n)$不是0，根据定理7得出$I(y)$在$y\in[0,+\infty)$不一致收敛。 □

**题 3.** 回答下列问题：

***1.***设$p,q>0$，证明$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}t\sin^{2q-1}t\mathrm{d}t$。

***2.***借助$\Gamma$函数表示出四维球$x^2+y^2+z^2+w^2\leq 1$的值。

分析：本题的第一问是$B$函数的三角函数表出，是非常重要的结论，利用第一问可以简单的写出四维球体的体积。

*Proof.* **1.**首先

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x. \tag{87}$$

做换元$x=\sin^2 t$，那么$\mathrm{d}x = 2\sin t\cos t\mathrm{d}t$，由此

$$B(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-2}t\cos^{2q-2}t\left(2\sin t\cos t\right)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}t\sin^{2q-1}t\mathrm{d}t. \tag{88}$$

本结论有诸多应用。例如在重积分计算中非常重要的两个三角函数定积分$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t$和$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\mathrm{d}t$有

$$I_n = \frac{1}{2}B(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}B(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}) = J_n. \tag{89}$$

并且我们还可以借助转换公式(72)计算这些$B$函数的值。

**2.**我们需要计算四重积分

$$V=\int\int\int\int 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}w. \tag{90}$$

然后写出四维球坐标换元公式

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta_1, \\ y &= r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ z &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ z &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3, \end{cases} \quad (r,\theta_1,\theta_2,\theta_3)\in[0,1]\times[0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,2\pi], \tag{91}$$

上述换元公式是模仿三维球坐标变换公式得到的。计算雅克比行列式

$$\frac{\partial(x,y,z,w)}{\partial(r,\theta_1,\theta_2,\theta_3)}=r^3\sin^2\theta_1\sin\theta_2. \tag{92}$$

所以

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int\int 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}w \\ &= \left(\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^\pi \sin^2\theta_1\mathrm{d}\theta_1\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta_2\mathrm{d}\theta_2\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}\theta_3\right) \\ &= \frac{1}{4}\times\left(B(\frac{3}{2},\frac{1}{2})\right)\times\left(B(1,\frac{1}{2})\right)\times(2\pi). \end{aligned} \tag{93}$$

计算

$$B(\frac{3}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}=\frac{\pi}{2}, \tag{94}$$

和

$$B(1,\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}=2. \tag{95}$$

由此$V=\frac{\pi^2}{2}$。 □

**题 4.** 设$f(x)$在$[0,1]$连续，考虑$I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$，证明
***1.***$I(y)$在$y\in(0,1]$连续。
***2.***$I(y)$在$y=0$右连续的充分必要条件是$f(0)=0$。

分析：令$g(x,y)=\frac{yf(x)}{x^2+y^2}$，如果$g(x,y)$在$(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$具有连续性，就可以根据含参变量正常积分的性质将连续性传递给$I(y)$。然而问题的关键是，$g(x,y)$在$(0,0)$点没有定义，使用$g(x,y)$的连续性也必须绕开没有定义的点$(0,0)$。我们本题的操作都是为了避免没有定义的点$(0,0)$造成的影响。

*Proof.* **1.**令$g(x,y)=\frac{yf(x)}{x^2+y^2}$。首先我们讨论$I(y)$在$y\in(0,1]$的连续性，只需要证明$I(y)$在每个点$y_0>0$连续。

首先$g(x,y)$在点$(x,y)\in[0,1]\times[\frac{y_0}{2},1]$具有二元连续性，所以$I(y)$在区间$y\in[\frac{y_0}{2},1]$连续，因此在点$y_0$连续。由于$y_0$的任意性，可知$I(y)$在$y\in(0,+\infty)$每一点都连续。

**2.**取定$y=0$时，$g(x,0)$在$x\neq 0$的每一个点都为0，所以$I(0)=\int_0^1 g(x,0)\mathrm{d}x=0$。我们需要讨论的是何时$\lim_{y\to 0+0} I(y)=0$。

研究极限$\lim_{y\to 0+0} I(y)$是无法简单地将积分号和极限号换序的，研究的方法是比较具有技巧性的。固定$y\in(0,1]$，我们将积分$I(y)$拆分为两部分

$$I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt[3]{y}}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\int_{\sqrt[3]{y}}^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x. \tag{96}$$

随着$y$接近0，前一段积分的积分区间逐渐减小，后一段积分的积分区间逐渐增大。我们分别估计两段积分：第一段积分采用定积分中值定理

$$I_1(y)=\int_0^{\sqrt[3]{y}}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=f(\xi)\int_0^{\sqrt[3]{y}}\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=f(\xi)\arctan\frac{\sqrt[3]{y}}{y}, \tag{97}$$

其中$\xi\in[0,\sqrt[3]{y}]$，那么$\lim_{y\to 0+0} I_1(y)=\frac{\pi f(0)}{2}$。第二段积分可以直接放缩，由于$f(x)$在$[0,1]$连续，假定$f(x)$有界$|f(x)|\leq M$，那么$\left|\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{yM}{y^2+y^{\frac{2}{3}}}$，因此

$$|I_2(y)|=\left|\int_{\sqrt[3]{y}}^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\right|\leq\frac{yM}{y^2+y^{\frac{2}{3}}}, \tag{98}$$

取$y\to 0+0$有$\lim_{y\to 0+0} I_2(y)=0$。综上分析有

$$\lim_{y\to 0+0} I(y)=\frac{\pi f(0)}{2}. \tag{99}$$

结合$I(0)=0$，得到$I(y)$在$y=0$有连续的充分必要条件是$f(0)=0$。 □

**题 5.** 设$f(x)$在$[0,+\infty)$连续，证明$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是含参变量无穷积分$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$在$y\in(0,+\infty)$一致收敛。

分析：本题的证明中，从$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛推$I(y)$直接使用含参变量无穷积分的Abel判别法；反向的证明比较麻烦，需要借助柯西准则的反证法，我们会在证明过程中分析问题的难点。

*Proof.* 一方面，如果$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，那么看作以$y$为参数的含参变量无穷积分有$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$一致收敛。拆分$a(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$和$b(x,y)=f(x)$，这样的拆分保证了$b(x,y)$满足$\int_0^{+\infty}b(x,y)\mathrm{d}x$在$y\in(0,+\infty)$一致收敛，$a(x,y)$满足关于$x$单调递减且一致有界，用Abel判别法有$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$在$y\in(0,+\infty)$一致收敛。

另一方面，我们假定$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$在$y\in(0,+\infty)$一致收敛，想要证明$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛。一个自然的想法是，如果可以证明

$$\lim_{y\to0+0}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{y\to0+0}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x\right)=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x, \tag{100}$$

就自然$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛。这一方法的难点在于$I(y)$仅在$y\in(0,+\infty)$一致收敛，我们无法将连续性传递到$y=0$处，自然也不可以讨论$\lim_{y\to0+0}I(y)$的情形。为了避免这一问题，我们考虑将含参变量无穷积分转化为含参变量正常积分讨论，因为含参变量正常积分连续性的讨论不依赖一致收敛的性质。

我们用反证法，如果$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$不收敛，那么根据柯西准则，存在$X_2>X_1>0$和$\varepsilon>0$使得

$$\left|\int_{X_1}^{X_2}f(x)\mathrm{d}x\right|>\varepsilon. \tag{101}$$

令$g(x,y)=f(x)\mathrm{e}^{-xy}$，那么$g(x,y)$在$(x,y)\in[X_1,X_2]\times[0,+\infty)$连续。利用含参变量正常积分的结论，可以将积分号和极限号换序

$$\lim_{y\to0+0}\int_{X_1}^{X_2}f(x)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x=\int_{X_1}^{X_2}f(x)\mathrm{d}x. \tag{102}$$

利用极限的性质，存在足够小的$y_0>0$使得

$$\left|\int_{X_1}^{X_2}f(x)\mathrm{e}^{-xy_0}\mathrm{d}x\right|>\frac{\varepsilon}{2}, \tag{103}$$

根据含参变量无穷积分的柯西准则，式(102)说明含参变量无穷积分$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$在$y\in(0,+\infty)$不一致收敛。 □

## 2.3 精选补充习题

**补 1.** 计算含参变量积分$\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$，其中参数$\alpha\geq0$。由此可以计算定积分$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$，此前我们曾通过对称的方法证明这一定积分的值是$\frac{\pi\ln2}{8}$。

**补 2.** 计算无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3x}{x}\mathrm{d}x$。

**补 3.** 设参数$A>0$，考虑含参变量无穷积分$I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$，证明：

***1.***$I(y)$在$y\in[A,+\infty)$一致收敛。

***2.***$I(y)$在$y\in[0,+\infty)$不一致收敛。

**补 4.** 证明：$I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{2+x^y}\mathrm{d}x$在$y\in(2,+\infty)$连续。