函数项级数

谢彦桐
北京大学数学科学学院

May 17, 2022

1　知识内容理解

函数项级数是具有重要意义的概念：我们知道具有明确解析式的函数只是极小一部分函数，然而如果给定一列函数$f_n(x)$，通过函数项级数可以定义新的函数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$，通过级数的方法我们可以表达实际应用中更为广泛的函数。虽然如此，我们如何将$f_n(x)$的信息传递到极限函数$S(x)$上是依赖“一致收敛”这个重要概念的，我们这一章的主要目的就是梳理“一致收敛”的来龙去脉。我们指出，本节我们既会研究函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$的一致收敛，也会研究函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$的一致收敛，二者在研究上大同小异但是需要区分。

1.1　理解“点点收敛”和“一致收敛”

我们现在讨论函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$，每个函数的定义域都是$[a,b]$（注：一般我们讨论都在闭区间或无穷区间讨论函数收敛性，也有部分题目会讨论开区间上的一致收敛性且定义是类似的），我们连续提出几个问题：

如何定义函数的收敛？

我们分几步来理解

- 序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于某数A，指的是序列取值“聚拢”向A。
- 平面上的点列$\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$收敛于某点$(X,Y)$，我们虽然没有直接学过点列的收敛，但是如果要让点列“聚拢”到(X,Y)，就必须两个分量分别收敛，即$\lim_{n\to\infty}x_n=X$和$\lim_{n\to\infty}y_n=Y$。

- 函数可以看作无穷个分量的向量：以$[a,b]$上的函数$f(x)$为例，对$x_1 \in [a,b]$函数值$f(x_1)$，其可以看作函数f在位置x_1处的分量，写出行向量的形式是

$$\langle f| = (f(a), \cdots, f(x_1), \cdots, f(b)). \tag{1}$$

  由于区间$[a,b]$包含无穷多个数，所以函数f对应的向量$\langle f|$是有无穷个分量的向量。

- 模仿点列的收敛，如果我们想定义函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于f，就必须要求函数的每一个“分量”收敛：即对于任意$t \in [a,b]$，序列$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$都收敛，则称函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$**收敛**于$f(x)$（为了与一致收敛区分，我们也称这种收敛为**逐点收敛**）。函数$f(x)$称为函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$的**极限函数**。

我们兹举几例，来体会收敛和发散的概念

- **例子1.** 在$[0,1]$考虑函数序列$f_n(x) = \frac{x^2}{n}$，对于给定$t \in [0,1]$有$\lim_{n\to\infty} \frac{t^2}{n} = 0$，所以函数序列$f_n(x) = \frac{x^2}{n}$收敛于极限函数$f(x) \equiv 0$，即恒为0的函数。如图1左所示。

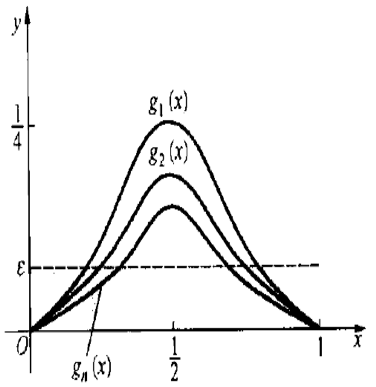
- **例子2.** 在$[0,1]$考虑函数序列$f_n(x) = x^n$，对于给定$t \in [0,1)$有$\lim_{n\to\infty} t^n = 0$，对于$t = 1$有$\lim_{n\to\infty} t^n = 1$，所以函数序列$f_n(x) = x^n$收敛于极限函数$f(x) = \begin{cases} 0 & ,x \in [0,1) \\ 1 & ,x = 1. \end{cases}$。如图1右所示。**由此可见连续函数的序列极限函数不一定连续。**

- **例子3.** 在$[0,2]$考虑函数序列$f_n(x) = x^n$，对于$t \in (1,2]$有$\lim_{n\to\infty} t^n$不收敛，所以函数序列$f_n(x) = x^n$在$[0,2]$不收敛，即便极限$\lim_{n\to\infty} t^n$对$t \in [0,1]$收敛。**由此可见函数序列的收敛性和函数的定义域有关。**

逐点收敛有哪些不足？为什么还需要一致收敛的概念？

我们指出定义函数收敛的初衷：我们希望刻画函数$f_n(x)$向函数$f(x)$的“聚拢”。从图1的左右两张图看，在n很大时，左图的$f_n(x) = \frac{x^2}{n}$各点函数值都能接近于0，右图的$f_n(x) = x^n$各个点函数值收敛于0的速度则不一致：靠近1的点收敛于0的速度是比较慢的。我们希望函数的“聚拢”是具有整体性的，而$f_n(x) = x^n$在$[0,1]$的收敛有着快慢不一的缺点。**上述现象体现了逐点收敛缺乏对函数收敛整体性的掌控。**

如果从目标导向来看，我们也希望极限函数$f(x)$能保持函数序列$f_n(x)$各个函数的一些性质。例如函数序列$f_n(x) = x^n$的每一个函数在$[0,1]$上均连续，但是极限函数$f(x) = \begin{cases} 0 & ,x \in [0,1) \\ 1 & ,x = 1. \end{cases}$在点1间断，由此$f_n(x)$的连续性没能传递给极限函数$f(x)$，究



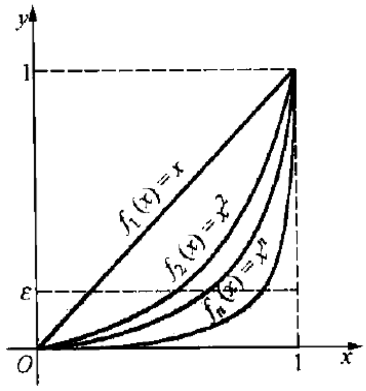


图 1: 左：在$[0,1]$上一致收敛的函数序列$f_n(x) = \frac{x^2}{n}$，其收敛具有整体性；右：在$[0,1]$上不一致收敛的函数序列$f_n(x) = x^n$，在图像上总能找到收敛速度很慢的点。

其原因，便是上述逐点定义的收敛在“聚拢”上缺乏“整体性”所导致的。我们定义一致收敛，就是要让函数序列的收敛具有整体性，定义域上各个点的收敛速度必须差不多快。

如何刻画一致收敛？

一致收敛是在逐点收敛的基础上定义的。我们首先叙述一致收敛的定义：称函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$**一致收敛**于函数$f(x)$，如果对于任意$\varepsilon > 0$，都存在$N \in \mathbb{N}^*$，使得$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$对一切$x \in [a,b]$和$n > N$都成立。记为$f_n \rightrightarrows f$。

接下来，我们从一致收敛背后的“收敛速度一致”这一内涵，来理解一致收敛的抽象定义

- 给定点$t \in [a,b]$，如何检验$\lim_{n\to\infty} f_n(t)$收敛到$f(t)$的速度呢？一个自然的想法是，给定$\varepsilon > 0$，我们来看当n多大时可以使得$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$，记

$$N(t) = \min\left\{N \in \mathbb{N}^* : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \forall n > N\right\}, \quad t \in [a,b]. \tag{2}$$

- $N(t)$是点t处收敛速度的标记，当$n \geq N(t)$就有$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$一定成立了。自然地，如果$N(t)$越小，那么$f_n(t)$收敛的速度越快；如果$N(t)$越大，那么$f_n(t)$收敛的速度越慢。

- 任给$\varepsilon > 0$，所谓一致收敛就是要让每一个$N(t)$都不能太大，数学上来看就是使$\sup_{t\in[0,1]} N(t) < \infty$。

- 回到一致收敛的数学定义，定义中的参数N是只依赖ε而不依赖$t \in [a,b]$的，此时N可以作为各个$N(t)$的上界，即$\sup_{t\in[0,1]} N(t) = N$。由此，代表各点收敛速度

的$N(t)$可以被与t无关的上界N控制住，这就使得各个点的收敛速度都不会太慢。

我们依然在$[0,1]$考虑函数序列$f_n(x)=x^n$收敛向极限函数$f(x)=\begin{cases}0 & ,x\in[0,1) \\ 1 & ,x=1.\end{cases}$的过程。取定$t\in[0,1)$，为了$|f_n(t)-f(t)|=t^n<\varepsilon$成立必须$n>\log_t\varepsilon=\frac{\ln\varepsilon}{\ln t}$（注意由于$t<1$，对数$\ln\varepsilon$和$\ln t$都是负数），亦即$N(t)=\frac{\ln\varepsilon}{\ln t}$。点$t$越接近1，$N(t)$自然越大，最终$\lim_{t\to 1-0}N(t)=+\infty$。所以$f_n(x)=x^n$收敛的过程我们总可以1个足够接近1的点收敛速度极慢，因此函数序列$f_n(x)=x^n$不一致收敛。

函数项级数及其一致收敛

模仿序列极限和一致收敛，我们也可以定义函数项级数及其一致收敛。依然是以$[a,b]$为定义域的函数序列$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$，函数项级数定义为部分和序列$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$的逐点极限

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x). \tag{3}$$

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的一致收敛则定义为部分和函数序列$\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$的一致收敛。

与数项级数类似，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛的最基本性质是$u_n(x)$一致收敛于0和柯西准则，对应数项级数将有的定理1和定理2:

定理 1. 如果函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛，那么函数序列$u_n\rightrightarrows 0$，这里*0*表示恒为*0*的函数。

定理 2. 柯西准则. 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛的充分必要条件是，对于$\forall\varepsilon>0$，都存在$N\in\mathbb{N}^*$，使得

$$\left|\sum_{k=m}^{n}u_k(x)\right|<\varepsilon,\quad \forall m,n>N,\, x\in[a,b]. \tag{4}$$

我们指出，如果函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$仅仅是点点收敛的，即对$\forall t\in[a,b]$都有数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)$收敛，由此$\lim_{n\to\infty}u_n(t)=0$对一切$t$成立，即函数序列$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$点点收敛于0。而函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛加强为一致收敛，则可以得到$u_n(x)$一致收敛于0这一更强的结论。

1.2 一致收敛的判别法

与数项级数收敛的判别类似，函数序列或函数项级数的一致收敛一般不使用定义或柯西准则，而是使用专门的判别法。关于一致收敛的判别法请关注三个点

1.函数序列和函数项级数一致收敛的判别法是不同的，请分别记忆。

2.判别不一致收敛和一致收敛的判别法也不一样。
3.逐点收敛是一致收敛的必要条件，所以判别一致收敛前务必确保函数序列或级数是逐点收敛的。

函数序列的一致收敛

我们现在讨论函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$，每个函数的定义域都是$[a,b]$，讨论函数序列一致收敛问题的第一步是求出极限函数$f(x)$。判断函数序列一致收敛最基本的方法是**极值判别法**。遗憾的是由于教材并没有引入极大值的概念，课本上忽略了这一方法。为了逻辑的完整性，我们在此补充。在定理的叙述中，符号sup代表极大值，不熟悉含义的同学可以用max替代sup，在此处表意相同。

定理 3. 极值判别法. 函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛于函数$f(x)$的充分必要条件是$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|=0$。

我们指出，极值判别法将判别一致收敛的问题转化为计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|. \tag{5}$$

对于每一个n，极大值$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|$（等价于$\max_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|$）代表函数$f_n$离极限函数$f$距离最远的点的距离，体现的是函数$f_n$向$f$聚拢的“最慢速度”。如果这种“最慢速度”的极限依然是0，说明逐点收敛的速度并没有在某个点过分的慢，因此$f_n(x)$保持“一致”的速度向$f(x)$收敛，即一致收敛。

使用极值判别法的重点落在极值$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|$的计算，对绝对值函数求极值是比较麻烦的（一般需要求导），因此课本上给出了极值判别法两个简单有效的推论，分别用于函数序列一致收敛和不一致收敛的判别：

定理 4. 函数序列一致收敛判别法. 函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$逐点敛于函数$f(x)$，如果存在正序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，对于每一个$n\in\mathbb{N}^*$都有$|f_n(x)-f(x)|<a_n$对一切$x\in[a,b]$成立，且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，那么函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛于函数$f(x)$。

定理 5. 函数序列不一致收敛判别法. 函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$逐点敛于函数$f(x)$，如果存在$[a,b]$上点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足极限$\lim_{n\to\infty}[f_n(x_n)-f(x_n)]$不收敛于*0*（发散或收敛于非*0*值），那么函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$不一致收敛于函数$f(x)$。

两个定理的叙述都有些复杂，我们简单讲解一下内涵。定理4通过构造序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$满足$|f_n(x)-f(x)|<a_n$对一切$x\in[a,b]$成立，从而用a_n表征f_n向f的收敛速度，如果$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，我们就可以理解f_n以“整齐”的速度一致收敛于f；定理5则转而构造$[a,b]$上点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中x_n是作为f_n向f收敛的最慢一点，如果极

限$\lim_{n\to\infty}[f_n(x_n)-f(x_n)]$不收敛于0，就说明每一个$f_n$都存在影响“收敛队形”的“害群之马”$x_n$，所以$f_n$不一致收敛于$f$。

例 1. 证明：函数序列$f_n(x)=nx\left(1-x^2\right)^n$在$[\frac{1}{2},1]$一致收敛，在$[0,1]$不一致收敛。

分析：讨论函数序列一致收敛第一步是判别逐点收敛性，显然f_n逐点收敛于恒为0的函数，接下来我们要套用定理4和定理5来讨论一致收敛性。

Proof. 给定$t\in[0,1]$都有序列极限

$$\lim_{n\to\infty} nt\left(1-t^2\right)^n=0. \tag{6}$$

因为当$t\in(0,1]$固定时，$\left(1-t^2\right)^n$作为小于1的数的方幂，确保了极限收敛于0。

下面证明f_n在$[\frac{1}{2},1]$一致收敛，我们考虑

$$\left|nx\left(1-x^2\right)^n-0\right|\le n\left(\frac{3}{4}\right)^n,\quad \forall x\in[\frac{1}{2},1]. \tag{7}$$

显然$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$，所以$f_n$在$[\frac{1}{2},1]$一致收敛于0。

下面证明f_n在$[0,1]$不一致收敛。我们构造序列$x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，因此

$$|f_n(x_n)-0|=\left|\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right|\to+\infty, \tag{8}$$

极限的证明是因为$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}$，这是上册序列极限讲义的一个例题。

用类似的方法，我们可以证明，对一切$A\in(0,1)$有f_n在$[A,1]$一致收敛于0，但是f_n在$[0,1]$不一致收敛于0。这一区别是$x=0$处的奇异性导致的，因为$x>0$时占主导收敛性的项是$\left(1-x^2\right)^n$，而当$x=0$时占主导收敛性的项是x。实际上，如果f_n在某区间I不一致收敛，但是在任意闭区间$[a,b]\subset I$都一致收敛f，则称f_n**内闭一致收敛**于f。后续幂级数章节会反复提及这一概念。 □

函数项级数的一致收敛

我们现在讨论函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，每个函数的定义域都是$[a,b]$。由于函数项级数的部分和难以计算，极限函数也常常求不出来，我们也不能先判别函数项级数的逐点收敛，所以不能直接套用函数序列的极值判别法或其他方法判别一致收敛性。为此，我们需要基于函数项级数的特点，设计合适的一致收敛和不一致收敛的判别法（函数项级数不一致收敛的判别法在课本上并没有作为命题给出，仅仅作为了例题的子结论，是容易被忽略的）：

定理 6. 强级数判别法. *考虑函数项级数*$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$*，如果存在正序列*$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*，对于每一个*$n \in \mathbb{N}^*$*都有*$|u_n(x)| < a_n$*对一切*$x \in [a, b]$*成立，且正项级数*$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*收敛，那么函数项级数*$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$*一致收敛。*

定理 7. 函数项级数不一致收敛判别法. *考虑函数项级数*$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$*，如果存在*$[a, b]$*上点列*$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*满足极限*$\lim_{n\to\infty} u_n(x_n)$*不收敛于0（发散或收敛于非0值），那么函数项级数*$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$*不一致收敛。*

我们指出定理6和定理7与定理4和定理5两两呼应。定理6构造了序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$控制$u_n(x)$，借助与数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的比较，我们保证了函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的“波动”不会很大，因此一致收敛；定理7则构造了点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，这一点列的存在说明函数序列$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$不一致收敛于0，根据定理1的逆反命题就有函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$不一致收敛。

接下来我们借助两个例题来看函数项级数一致收敛和不一致收敛的判别。其中使用强级数判别法时，我们选择的比较级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$一般选为p级数或等比级数，并借助不等式$|\sin x| \le |x|$，$\ln(1+x) \le x$和均值不等式等放缩$|u_n(x)| < a_n$。

例 2. 证明：函数项级数$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$在$(-\infty, +\infty)$不一致收敛，但在$[-M, M]$一致收敛，其中$M$是任意正实数。

分析：本题的一致收敛部分借助不等式$|\sin x| \le |x|$放缩，不一致收敛部分则是标准地构造点列。我们注意到构造的点列$x_n = 3^n\frac{\pi}{2}$极限为$+\infty$，这是$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$在有界闭区间一致收敛，在无界区间$(-\infty, +\infty)$不一致收敛。

Proof. 先证明$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$在$[-M, M]$一致收敛：考虑放缩

$$\left|2^n \sin\frac{x}{3^n}\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n |x| \le M\left(\frac{2}{3}\right)^n, \tag{9}$$

等比级数$\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$在区间$[-M, M]$一致收敛。

然后证明$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$在$(-\infty, +\infty)$不一致收敛：取点列$x_n = 3^n\frac{\pi}{2}$，那么$u_n(x_n) = 2^n$，于是$\lim_{n\to\infty} u_n(x_n)$不是0。所以$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$在$(-\infty, +\infty)$不一致收敛。

□

例 3. 判断函数项级数$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+nx^2} \sin\frac{1}{\sqrt{nx}} \arctan\sqrt{\frac{x}{n}}$在区间$(0, +\infty)$的一致收敛性。

分析：本题为强级数判别法的应用，综合使用了各种不等式。

	Dirichlet判别法	Abel判别法
$a_n(x)$的性质	$a_n(x)\rightrightarrows 0$且关于$n$单调	$a_n(x)$一致有界且关于n单调单调
$b_n(x)$的性质	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$部分和序列一致有界	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$一致收敛
结论	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$一致收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$一致收敛

Proof. 首先根据$\sin x\le x$对一切$x\ge 0$成立，因此

$$\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\le\frac{1}{\sqrt{nx}}. \tag{10}$$

其次根据$\tan x\ge x$对$x\in[0,\frac{\pi}{2})$成立，取$x=\arctan y$得到$\arctan y\le y$对一切$y\ge 0$成立，因此

$$\arctan\sqrt{\frac{x}{n}}\le\sqrt{\frac{x}{n}}. \tag{11}$$

最后由均值不等式$1+nx^2\ge 2\sqrt{n}x$，因此

$$\frac{x}{1+nx^2}\le\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{12}$$

因此

$$\left|\frac{x}{1+nx^2}\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\arctan\sqrt{\frac{x}{n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{nx}}\cdot\sqrt{\frac{x}{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}. \tag{13}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+nx^2}\sin\frac{1}{\sqrt{nx}}\arctan\sqrt{\frac{x}{n}}$一致收敛。 □

除了强级数判别法，Dirichlet-Abel判别法是函数项级数一致收敛判别法的另一种流派。如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$可以拆分$u_n(x)=a_n(x)b_n(x)$，当$a_n$和$b_n$具有一定性质，我们就可以证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛。具体的内容在表格总结：

这里我们要补充**一致有界**的概念：我们假定每一个a_n都是有界函数，在此基础上如果函数序列$\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$一致有界，是指存在**一致界**$M$使得$|a_n(x)|\le M$对一切$n\in\mathbb{N}^*$和$x\in[a,b]$。换言之，每一个$a_n(x)$的界$M_n$都要比一致界$M$小。根据一致收敛的定义，不难验证$a_n(x)\rightrightarrows 0$蕴含$\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$一致有界，由此Dirichlet判别法对$a_n(x)$的要求比Abel判别法对$a_n(x)$的要求高。另一方面，所谓$a_n(x)$对$n$单调，是指对每个固定的$t\in[a,b]$，序列$\{a_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$都是单调序列，是一个比较强的结论。

对于函数项级数的Dirichlet-Abel判别法的理解，我们还要给出下述释疑，这些释疑可以和数项级数Dirichlet-Abel判别法对应来看：

- 应用Dirichlet判别法和Abel判别法判别$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛性首先要设法拆分$u_n(x)=a_n(x)b_n(x)$。
- Abel判别法比Dirichlet判别法对$b_n(x)$要求更高，但对$a_n(x)$要求更低，因此结论是相同的。从证明来看，两个判别法都应用了Abel变换，因此是等价的。

- 在实际解题中，b_n的选取是比较固定的：对于Dirichlet判别法，常常取$b_n(x) = (-1)^n$，$b_n(x) = \sin(nx)$和$b_n(x) = \cos(nx)$（两个三角函数都需要定义域$[a,b]$不包含点$2k\pi$），这样选取使得$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$部分和序列一致有界；对于Abel判别法，常常取$b_n(x)$是常值函数，即$b_n(x) = B_n$满足$\sum_{n=1}^{\infty} B_n$收敛，常见的例子包括$b_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^p}$，其中$p > 0$。

我们特别说明$b_n(x) = \sin(nx)$和$b_n(x) = \cos(nx)$的一致有界性，设$\delta > 0$，考虑闭区间$[\delta, 2\pi - \delta]$，用裂项法有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \left(\text{或} \left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right|\right) \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} < \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}, \tag{14}$$

这说明三角函数序列的部分和在闭区间$[\delta, 2\pi-\delta]$一致有界。然而$b_n(x) = \sin(nx)$和$b_n(x) = \cos(nx)$在区间$[0, 2\pi]$不一致有界，因为在接近$2k\pi$的点处，三角函数序列的部分和趋向无穷。借助上述一致有界性，如果考虑$\{a_n\}$是一列单调且收敛于0的序列，用Dirichlet判别法就有级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$和$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$在闭区间$[\delta, 2\pi - \delta]$一致收敛，这是Dirichlet判别法使用最简单的例子。

接下来我们来看一个例题熟悉Dirichlet-Abel判别法

例 4. 证明：函数项级数$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$在区间$[0,1]$一致收敛。

分析：由于$S(x)$的每一项具有$(-1)^n$形式，故可以尝试使用Dirichlet判别法判别其一致收敛性。

Proof. 首先证明$S(x)$的绝对一致收敛性，使用Dirichlet判别法，选择

$$b_n(x) = (-1)^n,\ a_n(x) = x^n(1-x). \tag{15}$$

显然b_n的部分和序列是一致有界的。另一方面，函数序列$a_n(x)$对n单调递减，且在$[0,1]$逐点收敛于0，我们下面用定理2来证明$a_n(x)$一致收敛于0。通过求导求极大值的方法可以对$a_n(x)$进行放缩

$$a_n(x) = x^n(1-x) \le a_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}, \tag{16}$$

由于$a_n(x)$非负

$$|a_n(x) - 0| \le \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}, \tag{17}$$

由$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$得$a_n(x)$一致收敛于0。用Dirichlet判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$一致收敛。

对于本题我们略作补充：在例题5中我们通过一致收敛的性质可以证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$在$[0,1]$不一致收敛，然而有趣的是$a_n \rightrightarrows 0$，这说

明定理1的反向是不对的：即$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$一致收敛蕴含$a_n \rightrightarrows 0$，但是$a_n \rightrightarrows 0$推不出$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$一致收敛。

本题另一个值得注意的点是，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$的一致收敛性是不能用强级数判别法来判别的。其理由是，如果存在强级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$满足$|(-1)^n x^n(1-x)| < a_n$，这一结论同时可以说明级数$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$也收敛，然而后续我们会证明$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$并不一致收敛。这表明，强级数判别法实际上是一个相当强的结论，由于强级数列$|u_n(x)| \le a_n$的存在，它不仅保证$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$一致收敛，也保证了$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$一致收敛。如果一个函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$一致收敛，我们称函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$**绝对一致收敛**。与数项级数的绝对收敛类似，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$绝对一致收敛可以推出$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$一致收敛。所以使用强级数判别法实际上直接证明了级数的绝对一致收敛，是一个更强的结论。如本题的级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$是一致收敛的，但不绝对一致收敛，这样的级数被称为**条件一致收敛**的。 □

1.3 一致收敛与函数性质的传递

我们曾经说过一致收敛可以将函数序列$f_n(x)$的性质传递给极限函数$f(x)$，这是本节讨论的重点。类似地，一致收敛的函数项级数$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，也可以将各个$u_n(x)$的性质传递给极限函数$S(x)$。由此，我们可以通过研究单个$u_n(x)$的性质，来发掘极限函数$S(x)$的性质。这便是我们研究函数项级数最终的目的，通过函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$表达没有显式表达式的一类更广泛的函数。

特别地，不论是函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$还是函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，我们都假定定义域为$[a,b]$。

连续性的传递

一致收敛最基本的性质就是可以传递连续性，针对函数序列和函数项级数分别由下列结论：

定理 8. 设函数序列$f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛于$f(x)$，如果每一个$f_n(x)$都是$[a,b]$上的连续函数，那么$f(x)$也是$[a,b]$上的连续函数。

定理 9. 设函数项级数$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$一致收敛，如果每一个$u_n(x)$都是$[a,b]$上的连续函数，那么极限函数$S(x)$也是$[a,b]$上的连续函数。

我们指出，虽然定理8和定理9都假设f_n或u_n在闭区间$[a,b]$一致收敛，如果我们能证明f_n或u_n在开区间或无穷区间I一致收敛，同样可以将f_n或u_n在区间I的连续性传递给极限函数f和S。其中的缘由是连续性是逐点定义的，我们只要在I的每一个子闭区间讨论连续性的传递，就可以得出极限函数在I是每一点都连续。

下面是定理8和定理9的一个小应用：

例 5. 证明：函数项级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$在$[0,1]$不一致收敛。

Proof. 证明级数不一致收敛的常规方法是定理7，然而定理7是通过$u_n(x)$不一致收敛于0来推出$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$不一致收敛。然而在例题4我们证明了$x^n(1-x)\rightrightarrows 0$，所以我们无法通过定理7来证明$\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$在$[0,1]$不一致收敛。

我们利用连续性的传递方法，通过等比序列求和公式计算函数项级数的极限函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x}(1-x)=x & ,x\in[0,1)\\ 0 & ,x=1.\end{cases} \tag{18}$$

如果$\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$一致收敛，根据函数$x^n(1-x)$在$[0,1]$的连续性可以推出$S(x)$在$[0,1]$连续。然而通过等比序列公式得出的$S(x)$并不连续，推出矛盾，所以函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$不一致收敛。 □

定积分的传递

针对函数序列和函数项级数分别由下列结论

定理 10. 设函数序列$f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛于$f(x)$，如果每一个$f_n(x)$都在$[a,b]$上可积，那么$f(x)$在$[a,b]$上可积，并且定积分值满足

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{19}$$

定理 11. 设函数项级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛，如果每一个$u_n(x)$都在$[a,b]$上可积，那么极限函数$S(x)$在$[a,b]$上可积，并且定积分值满足

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x. \tag{20}$$

我们指出，定理11相当于告诉我们级数求和号和定积分号在计算中可以交换次序

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x. \tag{21}$$

这样“交换次序”在实际运算中非常方便，但是前提是必须保证$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$一致收敛。

导数的传递

导数的传递定理相较之前两个结论叙述更为复杂，我们首先真的函数序列和函数项级数叙述结论，再解释其中缘由：

定理 12. *设函数序列$f_n(x)$在$[a,b]$满足下述三个条件*
1.函数序列$f_n(x)$在$[a,b]$逐点收敛于$f(x)$；
2.每一个$f_n(x)$都在$[a,b]$上都有连续的导函数；
3.导函数序列$f_n'(x)$在$[a,b]$一致收敛；
那么极限函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数，并且导函数序列$f_n'(x)$在$[a,b]$一致收敛于$f'(x)$，即$\lim_{n\to\infty} f_n'(t) = f'(t)$对一切$t \in [a,b]$成立。

定理 13. *设函数项级数$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$满足下述三个条件*
1.函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$逐点收敛于$S(x)$；
2.每一个$u_n(x)$都在$[a,b]$上都有连续的导函数；
3.导函数的函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$一致收敛；
那么极限函数$S(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数，并且导函数的函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$一致收敛$S'(x)$，即$S'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)$对一切$t \in [a,b]$成立。

定理13相当于告诉我们级数求和号和定求导运算号在计算中可以交换次序

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{22}$$

然而导数的传递相比连续性和定积分的传递所需条件更为复杂，其主要区别在于：我们将$f_n(x)$或$u_n(x)$的可导性直接传递给极限函数$f(x)$或$S(x)$，所依赖的并非是$f_n(x)$或$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一致收敛性，而是导函数序列$f_n'(x)$或级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$的一致收敛性。

我们举一例说明，仅由$f_n(x)$的一致收敛性无法传递可导性，以解释上述两个定理的内涵：在$[0,\pi]$考虑函数序列$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$，显然$f_n \rightrightarrows 0$，记极限函数$f(x) = 0$。考虑导函数序列为$f_n'(x) = n\cos\left(n^2 x\right)$，显然$f_n'(x)$不收敛于0，这说明导函数序列$f_n'(x)$并不收敛于$f'(x)$。这说明仅由$f_n(x)$或$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一致收敛性并无法导出导函数的收敛性。从分析的理论解释，是导函数$f_n'(x)$的函数值通常难以用$f_n(x)$控制，如果想得到导函数的关系，就必须需要导函数本身的信息。

此外，虽然定理12和定理13都假设f_n'或$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$在闭区间$[a,b]$一致收敛，如果我们能证明f_n或$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$在开区间或无穷区间I一致收敛，同样可以将f_n或u_n在区间I的可导性传递给极限函数f和S。其中的缘由是可导是逐点定义的，我们只要在I的每一个子闭区间讨论可导性的传递，就可以得出极限函数在I是每一点都可导。

我们来看定理13的一个直接应用，该例题中的技巧是非常典型的：

例 6. 在$(1,+\infty)$上定义函数项级数$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$，证明$\zeta(x)$在$(1,+\infty)$上存在连续的导函数。

分析：设$u_n(x)=\frac{1}{n^x}$，通过验证会发现$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$(1,+\infty)$并不一致收敛，所以不能直接在$(1,+\infty)$上使用定理13。为此，我们在子区间$[1+\delta,+\infty)$上证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$一致收敛，根据定理13有$\zeta(x)$在一切子区间$[1+\delta,+\infty)$上存在连续的导函数。由于$\delta$的任意性，$\zeta(x)$在$(1,+\infty)$任意点都可导且导函数连续。这种证明一致收敛"退而求其次"的方法是方程重要的。

Proof. 容易验证定理13的前两个条件：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$逐点收敛于$\zeta(x)$且每一个$u_n(x)=\frac{1}{n^x}$具有连续的导函数。由于$u_n'(x)=-\frac{\ln n}{n^x}$，我们需要讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$(1,+\infty)$的一致收敛性。

任取$\delta>0$，我们来证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$[1+\delta,+\infty)$的一致收敛性：用强级数判别法

$$\left|\frac{\ln n}{n^x}\right|\le\frac{\ln n}{n^{1+\delta}},\tag{23}$$

根据数项级数部分知识，我们可以证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{1+\delta}}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$[1+\delta,+\infty)$一致收敛。

然后在区间$[1+\delta,+\infty)$应用定理13，就可以得到$\zeta(x)$在任意子区间$[1+\delta,+\infty)$具有连续的导函数。考虑到$\zeta(x)$的可导性和导函数的连续性都是逐点定义的，对于$\forall t\in(1+\infty)$，都存在δ使得$t\in[1+\delta,+\infty)$，所以$\zeta(x)$在任意$x=t$都可导且导函数连续，因此$\zeta(x)$在$(1,+\infty)$任意点都可导且导函数连续。

我们指出$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$是著名的黎曼Zeta函数，实际上我们可以反复利用定理13证明$\zeta(x)$是无穷次可导的。显然$\zeta(x)$是定义在$(1,+\infty)$的正值函数，著名的黎曼猜想则声称，如果把$\zeta(x)$通过复变函数的解析延拓方法延拓为在复平面$\mathbb{C}$定义的复值函数，那么$\zeta(x)$所有的非平凡零点都实部均为$\frac{1}{2}$。有趣的是，黎曼Zeta函数与自然数中素数的分布有深刻联系，不少数学家认为，只有先攻克黎曼猜想才有攻克哥德巴赫猜想的曙光。然而迄今为止，人们并没有发展出足够有效的数学工具来证明黎曼猜想。 □

最后，我们来看一个思路不直接但是很有趣的例题，这个例题不需要大家掌握其想法，只需要读懂其解答感受一致收敛带来函数性质传递这一工具的威力即可：

例 7. 证明以下命题：
1.对于一切$x\in\mathbb{R}$有$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$。
2.我们规定$0^0=1$，那么$\int_0^1\frac{1}{x^x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$。

分析：第一问是指数函数的泰勒级数，它将e^x写成了多项式函数的一致收敛极限，

体现了函数项级数表达其他函数的强大威力。借助e^x的多项式函数展开，我们可以研究复杂函数$\frac{1}{x^x}$的定积分。

Proof. **1.**令$u_n(x)=\frac{x^n}{n!}$，显然函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$逐点收敛，定义极限函数$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$。我们的目标是证明$S(x)=S'(x)$对一切$x\in\mathbb{R}$成立，结合初值条件$S(0)=1$求解常微分方程，就可以得到$S(x)=e^x$。

我们首先通过定理13证明极限函数$S(x)$求导，为此我们要考虑函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$导函数的函数项级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n'(x)=0+\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \tag{24}$$

我们需要通过函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$的一致收敛性，来说明$S(x)$可导。然而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$在区间$(-\infty,+\infty)$并不一致收敛，我们转而证明对于一切$M>0$，函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$在区间$[-M,M]$一致收敛。用强级数判别法有

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|\leq\frac{M^n}{n!}, \tag{25}$$

用D'Alembert判别法有数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M^n}{n!}$收敛，因此函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$在$[-M,M]$一致收敛。

根据定理13，由于$\sum_{n=0}^{\infty}u_n'(x)$在$[-M,M]$一致收敛，所以$S(x)$在$[-M,M]$具有连续的导函数，并且$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n'(x)$。根据式(24)就得到$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=S(x)$对一切$x\in[-M,M]$成立。考虑到区间参数$M>0$的任意性，$S'(x)=S(x)$对一切$x\in\mathbb{R}$都成立。

2.我们希望借助$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$将$\frac{1}{x^x}$表达出来：

$$\frac{1}{x^x}=x^{-x}=e^{-x\ln x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x\ln x)^n}{n!}. \tag{26}$$

我们注意到，上述等式只能说明函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x\ln x)^n}{n!}$逐点收敛于$\frac{1}{x^x}$，如果想计算$\frac{1}{x^x}$在$[0,1]$上的积分，我们还要证明函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x\ln x)^n}{n!}$再$[0,1]$一致收敛。

首先通过求导的方法证明$|x\ln x|\leq e^{-1}$，因此

$$\left|\frac{(-x\ln x)^n}{n!}\right|\leq\frac{e^{-n}}{n!}, \tag{27}$$

用D'Alembert判别法有数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n}}{n!}$收敛，因此函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x\ln x)^n}{n!}$在$[0,1]$一致收敛。于是根据定积分的传递

$$\int_0^1\frac{1}{x^x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1(-x\ln x)^n dx. \tag{28}$$

在上册定积分讲义中，我们曾通过分部积分计算下述定积分

$$\int_0^1 (x\ln x)^n \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}, \tag{29}$$

因此

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 (-x\ln x)^n \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}. \tag{30}$$

实际上，本题第2问源自于经典的函数方程

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x. \tag{31}$$

本题第二问给出了一个接近的解$f(x)=\frac{1}{x^x}$，虽然其在右侧的定积分积分上限并不匹配。印度数学家Ramanujan曾凭肉眼观察出上述函数方程真正的解：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{\mathrm{e}^{2\pi n}-1} = \int_0^{\infty}\frac{x^5}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{504}. \tag{32}$$

□

1.4 *从函数空间的度量角度理解一致收敛

这一部分为选读内容。我们现在不在研究单个函数，而是将全体$[a,b]$上的连续函数看作一个线性空间$C[a,b]$来思考。

序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于A，我们可以通过点a_n较A的距离趋向0来刻画，相当于$\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0$；点列$\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$收敛于$(X,Y)$，我们可以通过点$(x_n,y_n)$较点$(X,Y)$的距离趋向0来刻画，两点间距离用用勾股定理表示，即$\lim_{n\to\infty}\sqrt{(x_n-X)^2+(y_n-Y)^2}=0$。

我们指出平面上的点是二维欧几里得空间的元素，二维欧几里得空间也是线性空间，一个自然的想法是，我们能不能为同为线性空间的$C[a,b]$中的任意两个函数定义距离的概念呢？我们用$\rho(f,g)$表达函数$f,g\in C[a,b]$之间的距离，我们定义的距离不能是随意的，其必须与欧几里得空间中的距离有类似之处，我们总结了下述三个基本条件

1.正则性 $\rho(f,g)\geq 0$对一切$f,g\in C[a,b]$成立。$\rho(f,g)=0$当且仅当$f=g$。
2.对称性 $\rho(f,g)=\rho(g,f)$对一切$f,g\in C[a,b]$成立。
3.三角不等式 $\rho(f,h)\leq\rho(g,h)+\rho(f,g)$对一切$f,g,h\in C[a,b]$成立。
如果上述三个要求均满足，我们称$C[a,b]$上的函数$\rho(\cdot,\cdot)$为一个**度量**。

由于函数可以看作无穷维的向量，因此有下述两种最为直接的方式定义度量：
1.定义$\rho_{\infty}(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$，由于$f,g$都是连续函数上述最大值存在。这种定义方式以$f,g$上距离最远的函数值之差作为$f,g$的距离。
2.定义$\rho_2(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$，这种定义方式的本质是将勾股定理推广到无

穷维向量上，相当于差函数$f(x)-g(x)$在各个点函数值之和开根号。
不难验证上述两种度量都符合三条定义。

根据度量的概念，我们不难模仿出收敛的定义：称函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C[a,b]$收敛于$f$，如果$\lim_{n\to\infty}\rho(f_n,f)=0$。在此定义中套用$\lim_{n\to\infty}\rho_{\infty}(f_n,f)=0$，我们会得到函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛的结论。换言之，函数序列的一致收敛实际是连续函数在度量ρ_{∞}意义下的收敛。

部分同学可能会问，同为度量为什么我们要学习ρ_{∞}意义下的收敛性一致收敛，而不考虑度量ρ_2意义下的收敛呢？实际上ρ_{∞}意义下的收敛性的好处上，如果函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C[a,b]$一致收敛于$f$，根据一致收敛的性质立刻就有$f\in C[a,b]$，这种性质成为度量的**完备性**。然而$\rho_2$则不具有这样的性质，定义下述连续函数序列

$$f_n(x)=\begin{cases}-1 & ,x\in[-1,-n^{-1}],\\ nx & ,x\in(-n^{-1},n^{-1}),\\ 1 & ,x\in[n^{-1},1].\end{cases} \tag{33}$$

可以验证$f_n(x)$在$[-1,1]$并不一致收敛，但是在度量ρ_2的作用下，$f_n(x)$收敛于分段函数

$$f(x)=\begin{cases}-1 & ,x\in[-1,0],\\ 1 & ,x\in(0,1],\end{cases} \tag{34}$$

即$\lim_{n\to\infty}\rho_2(f_n,f)=0$。所以度量$\rho_2$不具有完备性，因为连续函数在度量$\rho_2$作用下可以收敛于不连续的函数。

实际上，人们可以在连续函数空间$C[a,b]$的基础上，通过补充函数的方法，使得度量ρ_2具有完备性，这一过程称为**完备化**。考虑平方可积函数空间

$$L^2[a,b]=\left\{f:\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty\right\}. \tag{35}$$

可以验证$L^2[a,b]$也是线性空间，且$C[a,b]\subset L^2[a,b]$。作为更大的函数线性空间，$L^2[a,b]$可以保证任取函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^2[a,b]$，度量$\rho_2$作用下的极限一定也在$L^2[a,b]$内。

值得一提的是，平方可积函数空间$L^2[a,b]$的定义里，使用的积分是Lebesgue积分而非Riemann积分，因此可以包含更丰富的函数。并且平方可积函数空间是可以定义内积的完备空间，即Hilbert空间。在现代数学和量子力学中，平方可积函数空间$L^2[a,b]$和度量ρ_2是更常用的。

2 经典习题

本节许多题目都是综合利用一致收敛各个性质的综合题，需要同学们将一致收敛的判别法和函数性质的传递融会贯通。

2.1 例题

题 1. 判断函数项级数$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$在区间$[-1,1]$和区间$[1,+\infty)$的一致收敛性。

分析：本题体现了同一个函数项级数$S(x)$在不同的区间上，一致收敛性可能不同。我们见到之所以本题的函数项级数在$[1,+\infty)$不一致收敛但是在$[-1,1]$一致收敛，是因为“害群之马”序列$x_n=n\ln^2 n$不在$[-1,1]$中。

Proof. 定义$u_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$。

首先讨论$\sum_{n=2}^{\infty}u_n(x)$在$[-1,1]$的一致收敛性。首先我们注意到$u_n(x)$在$x\in[-1,1]$是单调递增函数，因此

$$\left|\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)\right|\le\max\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n\ln^2 n}\right),-\ln\left(1-\frac{1}{n\ln^2 n}\right)\right\},\tag{36}$$

我们期望使用不等式$x\le\ln(1+x)$对右侧两项分别估计：首先对项$-\ln\left(1-\frac{1}{n\ln^2 n}\right)$做放缩

$$-\ln\left(1-\frac{1}{n\ln^2 n}\right)=\ln\frac{n\ln^2 n}{n\ln^2 n-1}\ge\ln\frac{n\ln^2 n+1}{n\ln^2 n}.\tag{37}$$

因此得到

$$\left|\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)\right|\le\ln\frac{n\ln^2 n}{n\ln^2 n-1}=\ln\left(1+\frac{1}{n\ln^2 n-1}\right).\tag{38}$$

所以

$$\max\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n\ln^2 n}\right),-\ln\left(1-\frac{1}{n\ln^2 n}\right)\right\}\le\ln\left(1+\frac{1}{n\ln^2 n-1}\right)\le\frac{1}{n\ln^2 n-1}.\tag{39}$$

用比较判别法，根据级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$收敛可以推知级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n-1}$收敛。因此函数项级数$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$在区间$[-1,1]$一致收敛。

另一方面，考虑序列$x_n=n\ln^2 n\in[1,+\infty)$，我们有$u_n(x_n)=\ln 2$对一切$n\ge 2$成立，因此$\lim_{n\to\infty}u_n(x_n)$不是0，用定理5知$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$在区间$[1,+\infty]$不一致收敛。 □

题 2. 考虑函数项级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$，回答下列问题

1.证明：$S(x)$的收敛域$D=(-1,1)$。

2.判断$S(x)$在D上的一致收敛性。

3.证明：$S(x)$是D上的连续函数。

分析：我们补充**收敛域**的概念：给出函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，收敛域$D$是指

$$D=\left\{t\in\mathbb{R}:\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\text{在点}x=t\text{收敛}\right\}.\tag{40}$$

证明函数项级数收敛域的题目只涉及数项级数收敛的各个方法，不涉及函数项级数的一致收敛方法。在弄清楚$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$收敛域基础上，我们可以探索级数在收敛域$D$上是否一致收敛。例如本题虽然$S(x)$在$D=(-1,1)$连续，但是连续性并不是直接通过$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$(-1,1)$一致收敛得到，而是证明了级数在$(-1,1)$内闭一致收敛（即在每一个子闭区间一致收敛）。

Proof. 令$u_n(x)=\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$。

1.固定$|x|<1$，我们证明数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$绝对收敛，即含绝对值的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|x+\frac{1}{n}\right|^n$收敛。用Cauchy判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|x+\frac{1}{n}\right|=|x|<1, \tag{41}$$

所以数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$绝对收敛。注意到在$x<0$时数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$不是正项级数，所以不能直接对原级数使用Cauchy判别法。

固定$|x|\geq 1$，我们证明数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$发散。注意到极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}x^n\left(1+\frac{1}{nx}\right)^n=\begin{cases}+\infty & ,|x|>1,\\ \mathrm{e} & ,|x|=1.\end{cases} \tag{42}$$

其中我们应用极限关系

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{nx}\right)^n=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}. \tag{43}$$

由于极限$\lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$不是0，说明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$发散。

2.我们证明$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$(-1,1)$不一致收敛。考虑点列$x_n=1-\frac{1}{n}$，此时$u_n(x_n)=1$，而$\lim_{n\to\infty}u_n(x_n)$不是0，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$D=(-1,1)$不一致收敛。

3.由于$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$(-1,1)$不一致收敛，我们不能直接用定理9得到$S(x)$在$(-1,1)$的连续性。我们退而求其次，证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$[-a,a]$一致收敛，其中$a<1$为任意正实数。

用强级数判别法。由于$a<1$，存在足够大的$N\in\mathbb{N}^*$，当$n>N$时有$a+\frac{1}{n}<\frac{1+a}{2}<1$。（注：$\frac{1+a}{2}$也可以换成任意一个介于开区间$(a,1)$的实数，其目的是保证$a+\frac{1}{n}$在$n$足够大的情况下小于一个小于1的正实数）因此

$$\left|x+\frac{1}{n}\right|^n\leq\left(a+\frac{1}{n}\right)^n<\left(\frac{1+a}{2}\right)^n, \forall n>N, \tag{44}$$

由$\frac{1+a}{2}<1$有$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1+a}{2}\right)^n$收敛，所以函数项级数$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$[-a,a]$一致收敛。考虑到收敛性与有限项无关，得到$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$-a,a]$一致收敛。再用定理9，$S(x)$在$[-a,a]$成立对一切$a<1$成立，用$a$任意性知$S(x)$在$[-1,1]$连续。 □

题 3. 考虑函数项级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$，回答下列问题：

1. 证明：函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$的收敛域$D=[0,+\infty)$。

2. 证明：$S(x)$在$[0,+\infty)$连续。

3. 证明：$S(x)$在$(0,+\infty)$可导。

分析：本题与上一题非常类似，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$在$[0,+\infty)$一致收敛，但是导函数序列在$[0,+\infty)$不一致收敛。

Proof. 令$u_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$。

1. 固定$x\geq 0$，我们证明正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$一致收敛。用比较判别法

$$\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\leq\frac{1}{1+n^2},\tag{45}$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$收敛得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$逐点收敛。

固定$x<0$时，我们证明正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$不一致收敛。注意到极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(e^{-x})^n}{1+n^2}=+\infty,\tag{46}$$

这是因为$e^{-x}>1$是给定的常数。因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$发散。

2. 我们用强级数判别法证明函数项级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$，由于

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\right|\leq\frac{1}{1+n^2},\forall x\in[0+\infty).\tag{47}$$

每一个$u_n(x)$都在$[0,+\infty)$连续，根据定理9有$S(x)$在$[0,+\infty)$连续。

3. 由于$u_n'(x)=\frac{-n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$，通过强级数判别法无法判别$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$[0,+\infty)$一致收敛，因为我们仅有

$$\left|\frac{-n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\right|\leq\frac{n}{1+n^2}.\tag{48}$$

我们转为证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$在$[a,+\infty)$一致收敛，其中$a$是任意正实数。因此

$$\left|\frac{-n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\right|=\frac{n}{(1+n^2)\mathrm{e}^{xn}}\leq\frac{n}{(1+n^2)c^n}\leq\frac{1}{2c^n},\forall x\geq a,\tag{49}$$

其中$c=\mathrm{e}^a>1$。因此导函数的函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$在$[a,+\infty)$一致收敛。用定理13，由于$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$逐点收敛，每一个$u_n(x)$均存在连续导数且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$一致收敛，得到$S(x)$在$[a,+\infty)$有连续的导函数。结合$a$的任意性，$S(x)$在$(0,+\infty)$每一点都有连续的导函数。 □

题 4. 函数序列$f_n(x)$均是$[a,b]$上的连续函数，如果$f_n(x)$在(a,b)一致收敛于$f(x)$，证明：

1.极限$\lim_{n\to\infty} f_n(a)$和$\lim_{n\to\infty} f_n(b)$收敛。

2.为(a,b)上的函数$f(x)$补充定义$f(a)=\lim_{n\to\infty} f_n(a)$和$f(b)=\lim_{n\to\infty} f_n(b)$，那么函数序列$f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛于$f(x)$，由此推出$f(x)$在$[a,b]$连续。

分析：本题的结论解释了我们总在闭区间讨论一致收敛性的原因，因为如果$f_n(x)$在开区间(a,b)一致收敛，借助$f_n(x)$的连续性我们还可以证明$f_n(x)$在更大的闭区间$[a,b]$也一致收敛，所以在开区间(a,b)讨论连续函数的一致收敛是没有意义的，不如限定在闭区间$[a,b]$讨论。本题为采用$\varepsilon-N$语言证明级数收敛性的题目，难度较大，证明方法为“三分法”，即将待估计的项$|f_n(a)-f_m(a)|$分成三部分讨论。

Proof. **1.**我们只证明极限$\lim_{n\to\infty} f_n(a)$收敛。由于我们并不清楚极限$\lim_{n\to\infty} f_n(a)$的具体值，所以采用柯西准则是方法：对$\forall\varepsilon>0$，我们证明存在$N\in\mathbb{N}^*$使得$|f_n(a)-f_m(a)|<\varepsilon$对一切$n,m>N$成立。我们将待估计的项$|f_n(a)-f_m(a)|$分成三部分讨论

$$|f_n(a)-f_m(a)|\leq|f_n(x)-f_n(a)|+|f_n(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-f_m(a)|,\tag{50}$$

其中第一个和第三个绝对值可以用部分和函数S_n和S_m的连续性估计，第二个不等式则由一致收敛性得到。这里$x\in(a,b)$是待定的足够接近于a的点，由于f_n和f_m在点a附近具有连续性，所以可以认为项$|f_n(x)-f_n(a)|$和项$|f_m(x)-f_m(a)|$足够小。而一致收敛保证项$|f_n(x)-f_m(x)|$也足够小，这便是“三分法”的思路。

证明的操作方法如下：根据一致收敛的柯西准则，存在足够大的$N_0\in\mathbb{N}^*$，使得对一切$n,m>N_0$有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\forall x\in(a,b),\tag{51}$$

此时对于确定的n和m，函数$f_n(x)$和$f_m(x)$在点a连续，因此根据连续性定义，存在正常数δ_n和δ_m有

$$|f_n(x)-f_n(a)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad\forall x\in(a,a+\delta_n),\tag{52}$$

和

$$|f_m(x)-f_m(a)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad\forall x\in(a,a+\delta_m),\tag{53}$$

针对确定的n和m取$x\in(a,a+\delta_n)\cap(a,a+\delta_m)$，结合不等式(50)有

$$|f_n(a)-f_m(a)|\leq|f_n(x)-f_n(a)|+|f_n(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-f_m(a)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\tag{54}$$

对于一切$m,n>N_0$成立。因此$\lim_{n\to\infty} f_n(a)$收敛。

2.结合第一问，我们知道函数序列$f_n(x)$在开区间(a,b)一致收敛，在点a和点b单点收敛，如果讨论$f_n(x)$在闭区间$[a,b]$的一致收敛性，收敛的速度就分为了(a,b)和a,b两

点一共三股势力。我们用定义证明$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$。对$\forall\varepsilon > 0$，我们证明存在$N \in \mathbb{N}^*$使得$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$对一切$n > N$和$x \in [a,b]$成立。

根据$f_n(x)$在(a,b)的一致收敛性，存在N_1，对一切$n > N_1$有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a,b), \tag{55}$$

根据$S(x)$在a,b两点的收敛性，存在N_2, N_3满足

$$|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon, \quad \forall n > N_2, \tag{56}$$

和

$$|f_n(b) - f(b)| < \varepsilon, \quad \forall n > N_3. \tag{57}$$

考虑$N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$，那么当$n > N$时上述三个不等估计都成立，即

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b], \tag{58}$$

因此$f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛于$f(x)$。 □

2.2 精选补充题

补 1. 求证：函数项级数$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty, \infty)$不一致收敛。（提示：借助连续性的传递，用反证法）

补 2. 证明：函数项级数$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$在$(0, +\infty)$不一致收敛，但是在$[a, +\infty)$一致收敛，其中$a > 0$。

补 3. 计算下述极限

1.$\lim_{x\to 3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{x-4}{x-2}\right)^n$.

2.$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$.

补 4. 设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，且$f(1) = 0$，请用一致收敛的定义证明$f_n(x) = x^n f(x)$一致收敛。