北京大学高等数学B习题课讲义：函数的性质和作图

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后修改：2022.11

1 知识点理解

在高中学习中，只要提到导数首先想到的便是导数和单调性、极值的关系。实际上，导数与这些函数性质的关系的严格推导是依赖于此前学习的中值定理和泰勒公式的。本节我们将从高等数学的严格视角来看导数与单调性、极值、凹凸性、渐近线等函数性态的关系，给出严格分分析方法。另外，请延续高中的好习惯，研究函数先求出定义域。

1.1 单调性

单调性是高中数学便引入的定义，我们在此重新叙述定义

定义 1.1. 设函数$f(x)$的定义域是区间I，称$f(x)$在闭区间$[a,b]$**（严格）单调递增**，如果对于一切$x_1,x_2\in I$和$x_1<x_2$都有$f(x_1)\leq f(x_2)$（$f(x_1)<f(x_2)$）；称$f(x)$在闭区间$[a,b]$**（严格）单调递减**，如果对于一切$x_1,x_2\in I$和$x_1<x_2$都有$f(x_1)\geq f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$）

关于单调性的定义有几点释疑：

1.部分高中课本对非严格的单调性定义为$x_1<x_2$都有$f(x_1)<f(x_2)$，读者学习高数时应更正为讲义中的定义。

2.（严格）单调递增的另一种等价描述是对任意$x_1,x_2\in I$都有$(f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)\geq 0$（$(f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)>0$）。

3.单调性必须在指定的区间I上才可以定义，单点的单调性讨论没有意义，不建议非区间的数集上讨论的单调性。

考虑$f(x)$是以$[a,b]$为定义域的函数。称$f(x)$在闭区间$[a,b]$**单调递增**，如果对于一

切$a \le x_1 < x_2 \le b$都有$f(x_1) \le f(x_2)$成立。这里需要指出，单调递增的定义是允许出现$f(x_1) = f(x_2)$的，这一点与高中课本定义不同。如果对于一切$a \le x_1 < x_2 \le b$都有$f(x_1) < f(x_2)$成立，称$f(x)$在闭区间$[a,b]$**严格单调递增**。

直接采用定义证明单调性需要借助任取x_1, x_2点的函数值比较因此计算量很大。通过拉格朗日中值定理，我们可以将单调性的讨论转化为导函数函数值在区间上的符号：

定理 1.1. 设函数$f(x)$在定义域I可导，那么$f(x)$在区间I（严格）单调递增的充分必要条件是$f'(x) \ge 0$（$f'(x) > 0$）对$x \in I$成立;$f(x)$在区间I（严格）单调递减的充分必要条件是$f'(x) \le 0$（$f'(x) < 0$）对$x \in I$成立

关于单调性判别定理，我们也有一些注意事项

1.如果定义域$I = [a,b]$是有限闭区间，那么只需$f'(x)$在开区间(a,b)的符号就可以讨论$f(x)$在闭区间$[a,b]$的单调性，并不需要考虑端点$x = a,b$的性质。这一点可以从拉格朗日中值定理中验证出来，读者可以自行验证。因此，**在闭区间讨论单调性是更方便的。**

2.初学者很容易弄混的点是，如果f仅在某一点$x = x_0$处满足$f'(x_0) \ge 0$（$f'(x_0) > 0$），并不能推出f在x_0的单调性。首先，**单调性必须是在集合上定义，讨论x_0一点的单调性没有意义**；其次，**如果想要推出f在x_0的邻域$(x_0 - r, x_0 + r)$具有单调性，必须研究f'在区间$(x_0 - r, x_0 + r)$的符号**，仅仅凭借$f'(x_0)$一点信息是不可以推出邻域$(x_0 - r, x_0 + r)$的单调性的。考虑如下函数

$$f(x) = \begin{cases} x + 100x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

根据导数的定义f在全体实数可导，且$f'(0) = 1$；但是受到病态项$x^2 \sin \frac{1}{x}$的影响，函数$f(x)$在$x = 0$附近高频震荡，因此$f(x)$在$x = 0$任何一个邻域都不单调，见图1。

3.那么如果仅有导数在一点函数值的信息$f'(x_0) > 0$或$f'(x_0) \ge 0$能推出什么呢？对于$f'(x_0) > 0$的情形，根据导数的定义和极限的单调性，我们可以证明存在足够接近x_0的点y和z满足$z < x_0 < y$，同时$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} > 0$和$\frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} > 0$;换言之，我们找到了两个点$y, z$分别位于$x_0$两侧且满足$f(y) > f(x_0) > f(z)$。然而我们不能对$x_0$附近的每一个点都推出上述性质。费马定理的证明就是类似思想导出的。

函数单调性在解题中的应用主要是证明不等式，单调性方法也是不等式证明除去拉格朗日中值定理以外一类主要的方法。这类方法的本质是将不等式的一部分设成函数$f(x)$，借助$f(x)$的导数研究单调性，最后推导不等式相关信息。

例 1. 设$x \in (0, \frac{\pi}{2})$，证明不等式：$\frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{x}$。

Proof. 定义$f(x) = \sin x \tan x - x^2$，我们只要说明$f(x) > 0$对$x \in (0, \frac{\pi}{2})$成立即可。为此我们需要研究$f(x)$的性态，方便起见我们在定义域$[0, \frac{\pi}{2})$讨论$f$（注：一般来说在闭区间

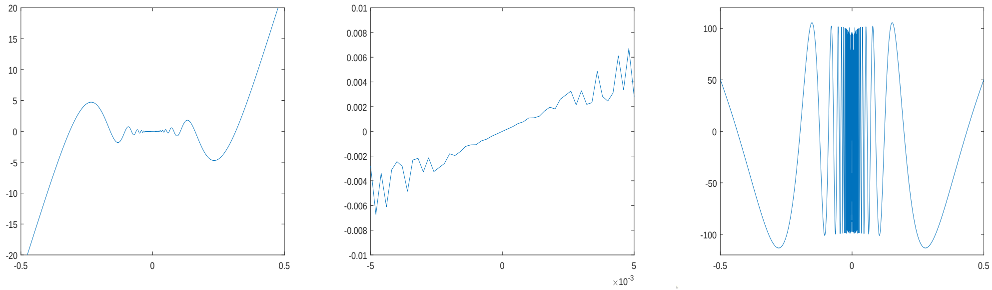

图 1: 三张图片展示了由式(1)定义的函数f在点0附近的性态；从左往右看，第一张图是f的整体示意图；第二张图是f在0附近更小的邻域的局部示意图，可以观察到f在0附近的高频震荡；第三章图是导函数f'的示意图，虽然$f'(0)=1$，但是f'在0的邻域里正负震荡，使得f在0附近不单调。

讨论函数比较方便，但是f在$\frac{\pi}{2}$没有定义）。计算

$$f'(x)=\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2 x}-2x. \tag{2}$$

由于f'分正负依然无法直接研究，我们首先根据f''研究f'的性态

$$f''(x)=\cos x+\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}-2=\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}-2\right)+\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}. \tag{3}$$

根据平均值不等式$\cos x+\frac{1}{\cos x}-2>0$在$x\in(0,\frac{\pi}{2})$成立，所以$f''(x)>0$在$x\in(0,\frac{\pi}{2})$成立，由此$f'(x)$在$[0,\frac{\pi}{2})$严格单调递增（注：推导$f'$在$[0,\frac{\pi}{2})$的严格单调性不需要$f''(x)$在$x=0$的导数信息），所以

$$f'(x)>f'(0)=0,\quad x\in[0,\frac{\pi}{2}), \tag{4}$$

由此$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2})$严格单调递增，所以$f(x)>f(0)=0$在$x\in(0,\frac{\pi}{2})$成立。

另外，本题如果选择$g(x)=\frac{\tan x}{x}-\frac{x}{\sin x}$再证明$g(x)>0$是非常麻烦的，做题时要选择合适的函数进行分析，解答中的f形式显然更简单。 □

1.2 极值与最值

定义和辨析

我们首先区分极值和最值的定义。

定义 1.2 (极值和极值点). 称点x_0是函数$f(x)$的一个（严格）**极大值点**，如果存在x_0的一个邻域(x_0-r,x_0+r)，$f(x)$有定义其对任意$y\in(x_0-r,x_0+r)$都有$f(x_0)\geq f(y)$（$f(x_0)>f(y)$），同时称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个（严格）**极大值**；称点x_0是函数$f(x)$的一个**极小值点**，如果存在x_0的一个邻域(x_0-r,x_0+r)，$f(x)$有定义其对任

意$y\in(x_0-r,x_0+r)$都有$f(x_0)\le f(y)$（$f(x_0)<f(y)$），同时称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个**极小值**

定义 1.3 (最值和最值点). 设函数$f(x)$的定义域是集合I，称点$x_0\in I$是函数$f(x)$的一个（严格）**最大值点**，如果对于任意$y\in I$都有$f(x_0)\ge f(y)$（$f(x_0)>f(y)$），同时称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个**最大值**；称点$x_0\in I$是函数$f(x)$的一个（严格）**最小值点**，如果对于任意$y\in I$都有$f(x_0)\le f(y)$（$f(x_0)<f(y)$），同时称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个**最小值**

简单来说，极大值点是局部邻域中的函数值最大的点，极大值点的确认并不依赖邻域以外的性质；最大值点的定义则需要放到全体定义域上来讨论函数值大小。显然，**极值点不一定是最值点**。另一方面，**最值点也不一定是极值点**：如果定义域是闭区间$[a,b]$，一般来说定义域边界的点$x=a,b$因为$f(x)$只在点一侧有定义所以不能成为极值点。例如$f(x)=x^2$定义域是$[0,1]$，那么$x=0$是最小值点但不是极小值点。然而如果函数的定义域是全体实数$\mathbb{R}$，那么最值点就必然是极值点。

极值点和最值点的判别法

在上述分析中，我们看到最值点的判别需要比极值点更多的信息，因为极值点的定义是“局部”的，而最值点的定义是“全局”的。利用导数的性质，我们可以不通过定义极值点的定义而简单地分析极值点，最值点的分析则比较复杂必须建立在极值点的分析之上。关于极值点和导数的关系，我们有如下的几个定理：

定理 1.2. 一阶必要条件，*Fermat*定理 设$f(x)$在邻域(x_0-r,x_0+r)有定义，且$f'(x)$在$x=x_0$可导。如果x_0是f一个极值点，那么$f'(x_0)=0$。

定理 1.3. 二阶必要条件 设$f(x)$在邻域(x_0-r,x_0+r)有定义，且$f'(x)$在$x=x_0$二阶可导。如果x_0是f一个极大(小)值点，那么$f'(x_0)=0$，并且$f''(x_0)\le(\ge)0$。

定理 1.4. 二阶充分条件 设$f(x)$在邻域(x_0-r,x_0+r)有定义，且$f'(x)$在$x=x_0$二阶可导。如果$f'(x_0)=0$，并且$f''(x_0)<(>)0$，那么x_0是f一个极大(小)值点。

直接考虑上述三个定理容易凌乱，我们做出几点总结：

1.稳定点和极值点 我们称导函数f'的零点，即满足$f'(x_0)=0$的点x_0为函数f的**稳定点**（部分文献称为驻点）。一阶必要条件告诉我们，极值点必须是稳定点。换言之，如果我们想找f的极值点，一阶必要条件告诉我们要**在稳定点中寻找极值点**。

2.鞍点和极值点 稳定点中不是极值点的点被称为**鞍点**，例如函数$y=x^3$，点$x=0$是稳定点但不是极值点，因此是鞍点。区分稳定点是极值点还是鞍点是很复杂的问题，例如当$f'(x_0)=f''(x_0)=0$时，导数信息符号二阶必要条件但是不符合二阶充分条件，我们

无法通过导数信息给出一个充分必要条件区分该点是鞍点还是极值点。（即不存在“二阶充分必要条件”）

3.与单调性定理的比较 上述极值定理都只需要f在x_0一点的导数信息就足够了，反观单调性则需要f在整体区间上的导数信息。

二阶充分条件和二阶必要条件的证明都是泰勒公式的简单应用，建议同学们掌握。我们下面给出二阶充分条件的证明。读者请自行补充二阶必要条件的证明：

Proof. 如果$f'(x_0)=0$，并且$f''(x_0)<0$，写出$f(x)$在$x=x_0$的局部泰勒公式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right) \\ &= f(x_0)+\left(\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)\right)(x-x_0)^2, \qquad x\to x_0, \end{aligned} \tag{5}$$

令$A(x)=\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)$，其中$o(1)$代表了一个形式未知的关于$x$的函数，且是无穷小量。根据$f''(x_0)<0$，取充分小的$\delta>0$，当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，由$A(x)=\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)<0$，所以

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)^2<f(x_0), x\in(x_0-\delta,x_0+\delta). \tag{6}$$

所以x_0是极大值点。 □

判断稳定点是不是极值点是非常重要的问题，在高等数学的范畴里区分的方法有两种：

1.二阶导数判别法 如果$f'(x_0)=0$，那么根据二阶导的符号有：$f''(x_0)>0$则x_0是极小值点；$f''(x_0)<0$则x_0是极大值点；$f''(x_0)=0$无法判断x_0是不是极值点，二阶导数判别法失效。

2.单调性判别法 类似高中的“列表法”。如果我们可以证明$f(x)$在左邻域$(x_0-\delta,x_0)$单调递减，在右邻域$(x_0,x_0+\delta)$单调递增，即“左减右增”，那么x_0就是$f(x)$的极小值点；如果我们可以证明$f(x)$在左邻域$(x_0-\delta,x_0)$单调递增，在右邻域$(x_0,x_0+\delta)$单调递减，即“左增右减”，那么x_0就是$f(x)$的极大值点；如果$f(x)$在左右邻域的单调性一致，那么x_0不是极值点。为完成单调性判别法我们一般需要在全体定义域上计算$f'(x)$并分析导数的符号。

两种方法都是判断极值点的重要方法，需结合使用。二阶导数判别法时常受限于二阶导数为0或是二阶导数形式太复杂而无法判断，单调性判别法则计算量较大，且对某些病态函数会失效（在高等数学的范畴里一般不会遇到这类病态函数）。

最后，我们给出极值点判定步骤：

1.计算f的定义域I。

2.计算f'并求出I上的稳定点，作为极值点的“候选人”。注意，如果I是闭区间，区间边界上的点不能成为极值点，所以不在“候选人”之列。（有时可能遇到f不可导的特

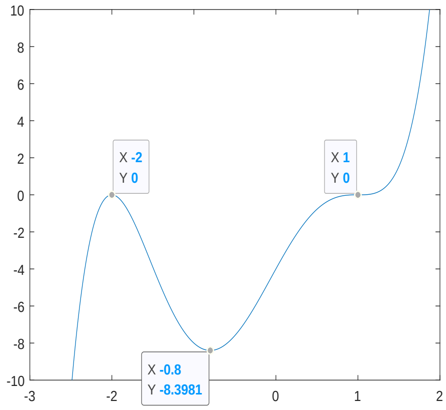

图 2: 题2示意图。

殊情形，对于不可导的点需额外对待，见讲义扩展习题2）

3.选择上述二阶导数判别法和单调性判别法之一，分析各个“候选人”是不是极值点。

在极值点的基础上，我们可以继续判别f的定义域I是的最值点，最值点有两种可能：极值点或是定义域边界上的点。我们需要吧这些“候选”最值点处f的函数值算出来，并选取其中函数值最大/小的作为最值点。

下述例题是最标准的极值点/最值点计算问题：

例 2. 设$f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$在$[-3,2]$定义，分析$f(x)$的极值点和最值点。

Proof. 选定定义域$[-3,2]$，计算导数

$$f'(x) = (x+2)(x-1)^2(5x+4), \tag{7}$$

因此f的稳定点有$x_1 = -2$，$x_2 = -\frac{4}{5}$和$x_3 = 1$，这三个点是极值点的“候选人”。

进一步判别稳定点是否为极值点，有两种方法：首先是二阶导数判别法，计算二阶导数

$$f''(x) = 20x^3 + 12x^2 - 30x - 2. \tag{8}$$

分别代入计算$f''(-2) = -54$，$f''(-\frac{4}{5}) = \frac{486}{25} > 0$和$f''(1) = 0$。由此$x_1 = -2$和$x_2 = -\frac{4}{5}$分别为$f$的极大值点和极小值点。对于$x_3 = 1$我们仍需要继续考虑。（这里可以看出二阶导数判别法的局限性）

另一方面，我们采用单调性判别法。我们将定义域$[-3,2]$分成四段：

$$(-3,-2),(-2,-\frac{4}{5}),(-\frac{4}{5},1),(1,2), \tag{9}$$

x	$[-3,-2)$	-2	$(-2,-\frac{4}{5})$	$-\frac{4}{5}$	$(-\frac{4}{5},1)$	1	$(1,2]$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y''	无需	$-$	无需	$+$	无需	0	无需
y	$\nearrow$	极大值点	$\searrow$	极小值点	$\nearrow$	非极值点	$\nearrow$

表 1: 函数$f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$导数信息表。

通过f'的形式，f'在四段的符号分别为$+,-,+,+$，所以我们可以绘制f的大致图像（不需要画凹凸性），做表1如图2。由图像可得$-2,-\frac{4}{5}$分别是极大值点和极小值点，而点$x_3=1$两侧f均单调递增，所以$x_3=1$不是极值点。

最后我们计算最值点，首先确定最值点的候选人是两个极值点$x_1=-2$和$x_2=-\frac{4}{5}$和两个最值点-3和2。分别计算得$f(3)=-200$，$f(-2)=0$，$f(-\frac{4}{5})=\frac{26244}{3125}\approx -8.4$和$f(2)=16$，所以$f$在$[-3,2]$的最大值点和最小值点为2和-3。计算$f(-\frac{4}{5})$时实际不需要算出具体值，就可以大致估计出$f(3)<f(-\frac{4}{5})$。 □

1.3 凹凸性

凹凸性刻画的是函数图像的弯曲形状。例如抛物线$y=x^2$和$y=-x^2$的开口方向不同，签证开口向上而抛物线的图形向下弯曲（形如$\smile$），后者开口向下而抛物线的图形向上弯曲（形如$\frown$）。我们希望通过数学语言严格区分方向不同的两类函数图形，图像形如$\smile$被称为**下凸**或是**凹**，图像形如$\frown$被称为**下凸**或是**凸**。

为了严格引入凹凸两个概念，我们必须借助数学的语言。在课本上，凹凸性的定义是通过函数图像和切线的位置关系：如果函数的每一条切线都位于图像下方（例如$y=x^2$），则称为下凸函数；如果函数的每一条切线都位于图像上方（例如$y=-x^2$），则称为上凸函数。具体的数学语言是：

定义 1.4 (凹凸性的切线定义)**.** 设f在(a,b)上可导，在点$x_0\in(a,b)$切线的方程是$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，如果

$$f(x)>\text{（}<\text{）}f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\quad \forall x,x_0\in(a,b),\quad x\neq x_0. \tag{10}$$

称f在区间(a,b)是**下凸函数（上凸函数）**，此时函数f在(a,b)每一点的切线都位于函数图像之下（上）。

然而，通过切线的定义只能为可导函数定义凹凸性，对于不可导的函数，我们有下述更一般的凹凸性定义：

定义 1.5 (凹凸性的一般定义)**.** 设f在(a,b)上定义，如果对任意$x_1,x_2\in(a,b)$和$t\in(0,1)$，都有

$$tf(x_1)+(1-t)f(x_2)>\text{（}<\text{）}f(tx_1+(1-t)x_2). \tag{11}$$

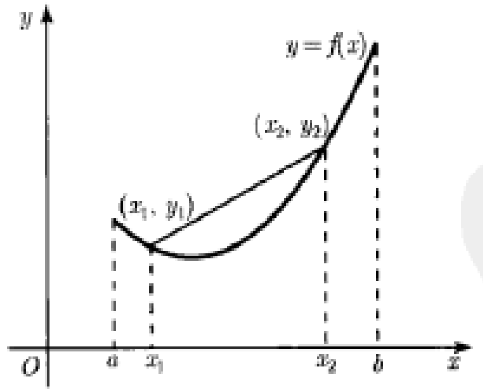

图 3: 图中展示了一个下凸函数。由于$x_1 < x_2$，点$tx_1 + (1-t)x_2$是介于点x_1和x_2之间的点，那么坐标点$(tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$则是连接点$(x_1, y_1)$和$(x_2, y_2)$的线段上的点。我们指出，下凸函数的定义告诉我们，连接(x_1, y_1)和(x_2, y_2)的线段上的每一个点，都位于函数的图形之上。

称f在区间(a, b)是**下凸函数（上凸函数）**，定义的几何意义见图*3*。

我们指出凹凸性的一般定义1.5蕴含了切线定义1.4。定义1.5是很强的结论，虽然定义1.5不要求函数f连续，但是我们可以从定义1.5的条件就推出上凸函数和下凸函数都是连续函数（证明连续的过程很麻烦）。就高等数学的课程而言，只需理解定义1.4及其几何意义即可，然而不少学科的后续课程会引入定义1.5作为凹凸性的定义。

与单调性类似，我们一般不通过定义判别函数的凹凸性，而是通过二阶导数的符号判别：

定理 1.5 (充分条件). 设$f(x)$在(a, b)二阶可导，如果$f''(x) >$（$<$）0对任意$x \in (a, b)$成立，那么f在(a, b)上上向下凸（向上凸）的。

对于给定的函数f，其二阶导的符号不一定总相同，根据二阶导的符号，如果找到二阶导恒为正的区间那么f在该区间必然下凸，如果找到二阶导恒为负的区间那么f在该区间必然上凸，而衔接上凸和下凸区间的点被称为**拐点**。对于二阶导为0的部分，凹凸性的分析是非常麻烦的，高等数学课程中一般不涉及很复杂的凹凸性问题。（注：二阶导为0的点不一定是拐点，拐点的定义要求左右两侧凹凸性不同）

1.4 渐近线与作图

渐近线

渐近线顾名思义就是函数图像不断接近的直线，例如反比例函数$y = \frac{1}{x}$就以两个坐

标轴$y=0$和$x=0$为两条渐近线，当x或y很大时，反比例函数$y=\frac{1}{x}$图像靠近坐标轴。

严格分析渐近线需分情况讨论：

1.垂直渐近线 这类渐近线是指与x轴平行的渐近线。$x=c$是$y=f(x)$的垂直渐近线的充分必要条件，要求当$x\to c$（包括单侧情形c+0或c−0），函数极限$\lim_{x\to c}f(x)$向∞（包括$\pm\infty$）发散，由此$x=c$是$y=f(x)$的第二类间断点。**由此我们应当在第二类间断点寻找垂直渐近线**。例如$y=\frac{1}{x}$存在第二类间断点$x=0$，且$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$，所以$x=0$是$y=\frac{1}{x}$的垂直渐近线。

2.一般渐近线 即不垂直于x轴的渐近线，这类渐近线的斜率存在，可以写成$y=ax+b$的形式。$y=ax+b$是$y=f(x)$的一般渐近线求当$x\to+\infty$或$x\to-\infty$时函数$y=f(x)$的图像会与渐近线接近。其中a,b可以有下述公式确定

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\, b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right), \tag{12}$$

因此在确定一般渐近线时只需要套公式(12)计算即可，如果计算过程中发现a或b对应的极限不存在，说明函数$f(x)$不存在一般渐近线。特别提示，渐进线可以分为向$+\infty$和向$-\infty$方向两类渐近线，如果考虑向$-\infty$方向的渐近线，则要将公式(12)极限中的$+\infty$改为$-\infty$。

我们指出，一个函数最多有两条一般渐近线，也可能不存在一般渐近线，但是可以有无穷多条垂直渐近线。例如函数$y=\tan x$存在无穷多条垂直渐近线$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，但是并不存在一般渐近线。

作图的方法

函数作图并不要求我们像计算机一样把函数图像的任何信息都做出来，重要的是我们把函数的主要信息表现出来。主要信息可以根据与f,f',f''的相关性分为四类：

1.零阶信息 指函数的定义域、连续性、间断点、和坐标轴的交点。

2.一阶信息 指函数的单调性、极值点、稳定点。

3.二阶信息 指函数的凹凸性、拐点。

4.渐进信息 画出函数的渐近线，并依据渐近线画出函数的大致走势。

在函数作图前，需要我们首先将函数的四类信息都整理好。习惯上，我们会将函数的一阶信息和二阶信息整理为表格，通过分区间的方法整理y的导数和二阶导数的符号。另一个关键点是

作图的整体步骤如下：

1.零阶信息 写出函数的定义域、连续性、间断点、和坐标轴的交点，在计算间断点时可以顺带找到函数的垂直渐近线。

2.一阶信息 计算导数f'，计算稳定点并以稳定点为界分析f'在不同区间的符号，得

出f在各个区间的单调性和极值点。

3.二阶信息 计算导数f''，以f''的零点为界分析f''在不同区间的符号，得出f在各个区间的凹凸性和拐点。

4.渐进线 计算f的一般渐近线。

5.制作表格 将f', f''在各个区间的信息整理在表格中，由此得出f在各个区间的单调性凹凸性，同时指出极值点和拐点。注意，在划分表格的各个区间中，应划分f所有的间断点、稳定点和拐点。

6.描点 计算f在若干个点的函数值，标在坐标纸上。描点是为了了解图形的大致位置。

7.作图 先在坐标纸上画出渐近线的图形，然后依照f在各个区间的单调性凹凸性，依照上一步的描点绘制图形。

例 3. 分析函数$y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$的单调性、极值、凹凸性、渐近线，并作图。

Proof. 我们首先整理$y = f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$的各种信息。

零阶信息 定义域$\{x \neq -1\}$。在$x \neq -1$的每一个点f都连续，在$x = -1$处

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1-0} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty, \tag{13}$$

因此-1是第二类间断点，同时直线$x = -1$是唯一的垂直渐近线。$y = f(x)$与坐标轴的交点是$(0, -1)$和$(1, 0)$。

一阶信息首先计算

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}. \tag{14}$$

由此f有两个稳定点$-5, 1$。结合f'的分母的符号，整理f各个区间的单调性以及极值点：在$(-\infty, -5)$单调递增；在$(-5, -1)$单调递减；在$(-1, 1)$单调递增；在$(1, +\infty)$单调递增。所以-5是极大值点，1不是极值点。

二阶信息首先计算

$$f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}, \tag{15}$$

由此分析f的凹凸性：在$(-\infty, -1)$和$(-1, 1)$上凸；在$(1, +\infty)$下凸。所以1是唯一的拐点。我们指出，虽然f在两个区间$(-\infty, -1)$和$(-1, 1)$分别上凸，但是我们不能用并集声称f在$(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$上凸，因为凹凸性必须在开区间定义，同时$f$在-1处并没有定义。

渐近线 计算极限

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1, \tag{16}$$

和

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^2 - 4x - 1}{(x+1)^2} = -5. \tag{17}$$

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	无定义	$+$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	无定义	$-$	0	$+$
y	$\nearrow,\frown$	极大值点	$\searrow,\frown$	极小值点	$\nearrow,\frown$	极大值点	$\nearrow,\smile$

表 2: 函数$y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$导数信息表。

由此得到一条渐近线$y=x-5$。另一方面，将上述极限$x\to+\infty$改为$x\to-\infty$极限值不变，因此$y=x-5$是$f(x)$唯一的一般渐近线。

制作表格 由于f有一个间断点，一个极值点和一个拐点，我们以这三个点分段整理f的导数信息如表2。

描点和作图 首先找到函数上几个点，如点$(-2,-27),(0,-1),(1,0),(2,\frac{1}{4})$。然后画出渐近线$x=-1$和渐近线$y=x-5$，两条渐近线将坐标平面划分成为四部分，但是根据我们描点的结果，函数图像位于两条渐近线交出的左下方和右上方。最后我们可以据此画图。

□

2 扩展延伸

2.1 扩展题概览

扩展延伸题部分难度较大，建议根据题目内容选择性阅读。

- 扩展习题1：中等难度，单调性判别法的应用。
- 扩展习题2：中等难度，有不可导点的极值最值问题。
- 扩展习题3：中等难度，计算量较大的作图题。
- 扩展补充题1：简单难度，极值最值综合题。
- 扩展补充题2：中等难度，单调性的应用。
- 扩展补充题3：中等难度，极值定理的证明题应用。
- 扩展补充题4：中等难度，应用问题。

2.2 扩展习题

题 1. 设$\alpha>0$，如果$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$在$(0,+\infty)$严格单调递减，求$\alpha$的取值范围。

分析：本题考查分析单调性的技巧。本题的解题关键是借助导函数在$+\infty$的极限分析导函数的符号。

Proof. 通过分析导数f'的符号分析单调性，计算

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}\left((x+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+\alpha}{x^2+x}\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

定义

$$u(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+\alpha}{x^2+x}. \tag{19}$$

注意到u与f'同号，因此我们只需要分析u的符号就可以得到f'的符号。为此我们继续计算u的导函数

$$u'(x)=\frac{\alpha+(2\alpha-1)x}{x^2(1+x)^2}. \tag{20}$$

根据u'分子一次项的系数我们可以进一步分析u'的符号：

1.如果$\alpha\geq\frac{1}{2}$，此时$u'(x)>0$对$x\in(0,+\infty)$成立，于是u对$x\to(0,+\infty)$单调递增。为了由u的单调性研究u的符号，我们注意到极限

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=0, \tag{21}$$

这说明

$$u(x)<\lim_{x\to+\infty}u(x)=0, \tag{22}$$

即$u(x)<0$对$x\to(0,+\infty)$成立，因此$f'(x)<0$对$x\to(0,+\infty)$成立，进一步$f(x)$在$(0,+\infty)$严格单调递减。

2.如果$\alpha<\frac{1}{2}$，那么当$x\in\left(\frac{\alpha}{1-2\alpha},+\infty\right)$有$\alpha+(2\alpha-1)x<0$，说明此时$u'(x)<0$，于是$u$对$x\in\left(\frac{\alpha}{1-2\alpha},+\infty\right)$单调递减。所以

$$u(x)>\lim_{x\to+\infty}u(x)=0,\ x\in\left(\frac{\alpha}{1-2\alpha},+\infty\right). \tag{23}$$

进一步$f'(x)>0$对$x\in\left(\frac{\alpha}{1-2\alpha},+\infty\right)$成立，与题设矛盾。 □

题 2. ***2020高等数学B期末考试题.*** 求定义域为$[-1,1]$的函数$f(x)=x^{\frac{2}{3}}-\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}$的所有极值点和最值点。

分析：本题的陷阱是f在0处的导数不存在，因此不能直接根据费马定理判断$x=0$是不是极值点。

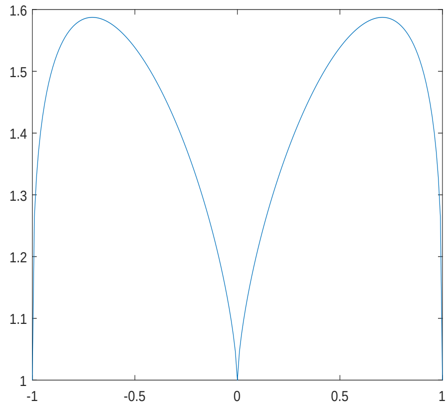

图 4: 题2示意图。

Proof. 定义域确定为$[-1,1]$，我们不难计算$x\neq 0,\pm 1$时f的导数：

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{2x}{3}\left(x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{2x}{3}\left(x^{-\frac{4}{3}}-\left(x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}\right) \tag{24}$$

当$x=0,\pm 1$时f不可导。事实上证明f在这些点不可导是异常麻烦的，证明的难度远超这道例题本身，而且我们这里也没必要计算这些导数。我们只需要在在寻找极值点的“候选人”时，把这些“恼人”的不可导点都加入“候选人”中即可。令$f'(x)=0$得到

$$x^{-\frac{4}{3}}=\left(x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}, \tag{25}$$

左右乘方$-\frac{3}{2}$次得到

$$x^2=\left|x^2-1\right|, \tag{26}$$

解得$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$是稳定点。于是我们找到了五个极值点“候选人”：$\pm 1,0,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$。

接下来，由于f''非常难计算，我们分段考虑f'的符号。由于f是偶函数，我们首先在$x\in(0,1)$考虑。令$g(x)=x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$在$x\in(0,+\infty)$单调递减，此外

$$x^{-\frac{4}{3}}-\left(x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}=g\left(x^2\right)-g\left(\left|x^2-1\right|\right). \tag{27}$$

当$x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$时$x^2<\left|x^2-1\right|$，所以$g\left(x^2\right)-g\left(\left|x^2-1\right|\right)>0$，所以$f'(x)>0$；相应的，当$x\in(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$时$x^2>\left|x^2-1\right|$，所以$g\left(x^2\right)-g\left(\left|x^2-1\right|\right)<0$，所以$f'(x)<0$。（注意$f'$在这两段函数值必然同号，取$f'$特殊的函数值验证其符号也可以）由此，函数$f$在$(0,1)$上的变化趋势是先增后减。由于$f$是偶函数，我们也可以类似写出$f$在$x\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$和$x\in(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$的单调性，整理在表3。综上所述，$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$是$f$的极大值点，$0,\pm 1$是极小值点。

最后研究最值点。可以计算得$f(-1)=f(0)=f(1)=1$和$f(\frac{\sqrt{2}}{2})=f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=2^{\frac{2}{3}}$。由此$f$有三个最小值点$0,\pm 1$和两个极大值点$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$。

□

x	$(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$	0	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$
y'	$+$	0	$-$	不可导	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	极大值点	$\searrow$	极小值点	$\nearrow$	极大值点	$\searrow$

表 3: 函数$f(x)=x^{\frac{2}{3}}-\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}$导数信息表。

题 3. 分析函数$y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$的单调性、极值、凹凸性、渐近线，并作图。

分析：相较此前例题，本题的计算量更大且细节更多，用于读者练习作图方法对照学习使用。

Proof. 我们首先整理$y=f(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$的各种信息。

零阶信息 定义域$\{x\neq-1\}$。在$x\neq-1$的每一个点f都连续，在$x=-1$处

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-1-0}\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}=-\infty. \tag{28}$$

由此$x=-1$是垂直渐近线。$y=f(x)$与坐标轴的交点是$(0,0)$和$(1,0)$。

一阶信息首先计算

$$f'(x)=\frac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3}. \tag{29}$$

由此f有三个稳定点，从小到大依次是：$x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{2},x_2=0,x_3=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$。结合$f'$的分母的符号，我们不难整理$f$各个区间的单调性以及极值点：在$(-\infty,\frac{-3-\sqrt{17}}{2})$单调递增；在$(\frac{-3-\sqrt{17}}{2},-1)$单调递减；在$(-1,0)$单调递增；在$(0,\frac{-3+\sqrt{17}}{2})$单调递减；在$(\frac{-3+\sqrt{17}}{2},+\infty)$单调递增。根据区间的单调性，点$\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$是极大值，点$0$是极小值点。

二阶信息首先计算

$$f''(x)=\frac{10x-2}{(x+1)^4}, \tag{30}$$

我们不难整理f各个区间的凹凸性以及极值点：在$(-\infty,-1)$和$(-1,\frac{1}{5})$分别上凸；在$(\frac{1}{5},+\infty)$下凸。所以点$\frac{1}{5}$是唯一的拐点。

渐近线 计算极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-1)}{(x+1)^2}=1, \tag{31}$$

和

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x(3x+1)}{(x+1)^2}=-3. \tag{32}$$

由此得到一条渐近线$y=x-3$。另一方面，将上述极限$x\to+\infty$改为$x\to-\infty$极限值不变，因此$y=x-3$是唯一的一般渐近线。

制作表格 整理一阶二阶信息得到表4。由于函数有一个间断点，三个稳定点和一个挂点，我们要以这五个点为界分成六段进行讨论：

x	$(-\infty,\frac{-3-\sqrt{17}}{2})$	$\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$	$(\frac{-3-\sqrt{17}}{2},-1)$	-1	$(-1,0)$	0
y'	$+$	0	$-$	无定义	$+$	0
y''	$-$	$-$	$-$	无定义	$-$	$-$
y	$\nearrow,\frown$	极大值点	$\searrow,\frown$	间断点	$\nearrow,\frown$	极小值点
x	$(0,\frac{1}{5})$	$\frac{1}{5}$	$(\frac{1}{5},\frac{-3+\sqrt{17}}{2})$	$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$	$(\frac{-3+\sqrt{17}}{2},+\infty)$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	$\searrow,\frown$	拐点	$\searrow,\smile$	极小值点	$\nearrow,\smile$	

表 4: 函数$y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$导数信息表。

描点和作图 首先找到函数上几个点，如点$(-2,-12),(0,0),(1,0),(2,\frac{4}{9})$，然后画出渐近线，依照渐近线作图。

□

2.3 扩展补充题

补 1. 计算下列函数的极值和最值

1. $y=2\tan x-\tan^2 x$，定义域$(0,+\infty)$。

2. $y=\left|x(x^2-1)\right|$，定义域$\mathbb{R}$。

补 2. 设$n\in\mathbb{N}^*$，证明方程$x^{n+2}-2x^n-1=0$存在唯一的正实根。

补 3. 考虑在$[a,b]$二阶线性常微分方程边值问题：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x),a<x<b,y(a)=A,y(b)=B, \tag{33}$$

其中p,q,r为给定函数，A,B为给定常数，若$q(x)<0$对一切$x\in(a,b)$成立，那么方程至多只有一个解$y(x)$。

补 4. 设a是给定的正实数，如果将a拆分成若干个正实数的和，如何拆分可以使得这些拆分的正实数积最大？