北京大学高等数学B习题课讲义函数极限

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后修改：2022.9

本讲义中，凡以x,y为自变量的极限均指函数极限，以n,m为变量的极限均指序列极限，请读者务必区分。

1 知识点详解

本讲义假定你已经对序列极限的理论非常了解，并以此为基础建立函数极限的理论。

1.1 函数极限的定义和性质

函数极限也是通过抽象的$\varepsilon-\delta$语言定义的。函数极限的定义结构与序列极限颇为类似，但是为了适应函数在连续的区间（邻域）定义的特点而做出了调整。学习函数极限理论，应重视函数连续定义域导致的定义区别。

定义 1.1. 设函数$y=f(x)$在点a的去心邻域

$$U_r^0(a)=(a-r,a)\cup(a,a+r), \tag{1}$$

上有定义。称$f(x)$在点a处收敛于实数l，如果对$\forall\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得$|f(x)-l|<\varepsilon$对一切满足$0<|x-a|<\delta$的x都成立。记为$l=\lim_{x\to a}f(x)$。

类比序列极限，函数极限也可以直观地被理解为函数值的“聚拢”，即函数$f(x)$在点$x=a$附近的函数值与某数l十分接近。我们考虑两个经典例子：函数$f_0(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$和函数$f_1(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$，其图像分别如图所示：极限$\lim_{x\to 0}f_1(x)$是0，因为当$x$接近0时$y=f_1(x)$的图像被“夹在”$y=x$和$y=-x$之间，函数值向0聚拢；极限$\lim_{x\to 0}f_0(x)$不存在，因为当$x$接近0时$y=f_2(x)$在$[-1,1]$反复震荡，不向任何值收敛。特别需要注意的是，$f_0$和$f_1$在点$x=0$均没有定义，但是这不影响极限的合理定

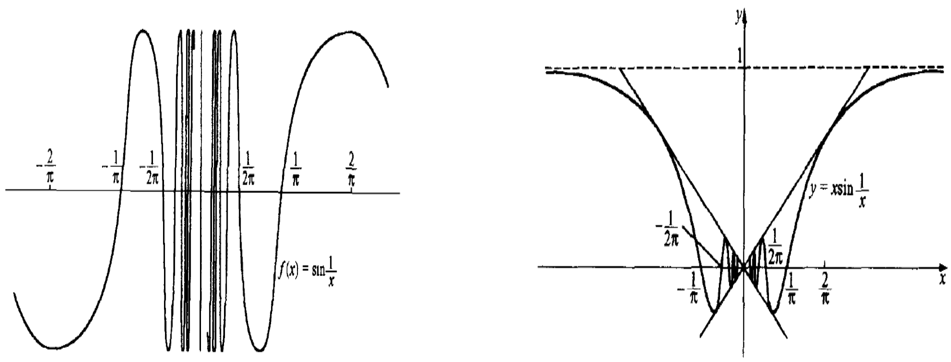

图 1: 函数$f_0(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$和函数$f_1(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$在$x=0$附近图像和收敛性态示意图。

义。这两个函数是函数极限理论最重要的两个例子，必须牢记！我们下面使用严格的语言证明$\lim_{x\to 0} f_1(x)=0$。

例 1. 证明极限$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$。

Proof. 我们将极限$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$整理为$\varepsilon-\delta$语言的命题：对于$\forall\varepsilon>0$，要找一个$\delta>0$，使得对一切$0<|x|<\delta$都有

$$\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon. \tag{2}$$

对式(2)的左侧适当放大：由于$\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|<|x|$，只要取$\delta=\varepsilon$，就对一切$0<|x|<\delta$确保了

$$\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le|x|<\delta=\varepsilon, \tag{3}$$

由此式(2)对一切$0<|x|<\delta$成立。 □

序列极限的许多性质都可以推广到函数极限，如夹逼原理、四则运算、单调有界原理、超越复合运算等。当然函数极限也有许多额外的概念，我们选择重点总结。

单侧极限

常规的函数极限考虑的是函数$f(x)$在$x=a$附近的函数值聚拢现象。相对地，单侧极限只考虑$f(x)$在$x=a$一侧的函数值的聚拢。其严格定义为

定义 1.2. 设函数$y=f(x)$在点a的区间$(a-r,a)$（或$a,a+r)$）上有定义。称$f(x)$在点a处**左极限**（或**右极限**）为实数l，如果对$\forall\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得$|f(x)-l|<\varepsilon$对一切满足$a-\delta<x<a$（或$a<x<a+\delta$）的x都成立。记为$l=\lim_{x\to a-0} f(x)$（或$l=\lim_{x\to a+0} f(x)$）。

可见上述定义保持了函数极限定义的原有框架，并对函数定义域和对应取值范围做出修正，适应单侧的概念。关于单侧极限最重要的命题是

定理 1.1. 设函数$y = f(x)$在点a的去心邻域$U_r^0(a)$有定义，那么极限$\lim_{x\to a} f(x)$收敛的充分必要条件是$f(x)$在$x = a$处的左右极限均存在且相等。在此情况下，$f(x)$在点$x = a$处的极限等于其左右极限。

上述定理可以理解为$f(x)$在点$x = a$的聚拢信息可以整合为$x = a$附近整体的聚拢信息。我们略去证明。

无穷远点的极限

我们用∞代表数轴无限延伸的点，即无穷远点，根据正向和负向可以区分正无穷和负无穷。利用无穷远点的概念，我们也可以定义函数在无穷远点的极限：

定义 1.3. 设函数$y = f(x)$在区间$(a, +\infty) \cup (-\infty, a)$定义。称$f(x)$在无穷远点$\infty$处极限为实数$l$，如果对$\forall \varepsilon > 0$，都存在$A > 0$，使得$|f(x) - l| < \varepsilon$对一切满足$|x| > A$的$x$都成立。记为$l = \lim_{x\to\infty} f(x)$。

可见，由于考虑的是无穷远点的极限，极限定义中的a点处邻域概念也转变为“无穷远点的邻域”，即以无穷维端点的区间。另外，无穷远点处也可以定义单侧极限和双侧极限，记为$\lim_{x\to+\infty} f(x)$或$\lim_{x\to-\infty} f(x)$，读者可以自行补充二者的定义。

值得一提的是，序列极限$\lim_{n\to\infty} a_n$与函数极限$\lim_{x\to\infty} f(x)$的符号都包含“$\to \infty$，而序列极限意指脚标$n \in \mathbb{N}^*$从$1, 2$变为无穷，而函数极限意指自变量x从正向和负向两个方向接近无穷远点，二者是有明显差别的。特别地，序列极限只有$n \to \infty$，函数极限还可以单侧定义$x \to +\infty$和$x \to -\infty$。直观来说，$n \to \infty$更接近$x \to +\infty$的离散情形。

广义收敛和函数极限的发散

类似序列极限，函数极限也可以定义广义收敛，即极限为无穷远点的情形。借助极限定义的框架，我们可以给出如下定义：

定义 1.4. 设函数$y = f(x)$在点a的去心邻域$U_r^0(a)$上有定义。称$f(x)$在点a处**广义收敛**于$+\infty$（或$-\infty$），如果对$\forall X > 0$，都存在$\delta > 0$，使得$f(x) > X$（或$f(x) < -X$）对一切满足$0 < |x - a| < \delta$的x都成立。记为$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$（或$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$）。

类似地，我们还可以定义单侧广义收敛和在无穷远点处的广义收敛，以及极限是双侧无穷远点∞的情形，这里我们均不作赘述。

由此，我们可以总结函数极限发散的三种情形：

1.震荡发散 如$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$，其在$x=0$附近函数值反复震荡。

2.双侧极限不统一 如$\lim_{x\to 0}[x]$，高斯函数导致了不同的单侧极限，即$\lim_{x\to 0+0}[x]=0$而$\lim_{x\to 0-0}[x]=-1$。

3.广义收敛 如$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$，在$x=0$处函数值向∞发散。

不含心性质

我们重新回到定义函数极限$\lim_{x\to a}f(x)$的过程，该定义只讨论函数在去心邻域$U_r^0(a)$的函数中，$f(x)$在点$x=a$处的函数值对极限并无影响，甚至许多情况下$f(x)$可以在$x=a$没有定义，例如特殊极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，函数$\frac{\sin x}{x}$在$x=0$分母为0所以没有定义。

函数极限和序列极限的关系

我们这里重要讨论函数极限和序列极限的关系：归结定理。我们首先叙述结论：

定理 1.2. 归结定理. 设$f(x)$在去心邻域$U_r^0(a)$上有定义，那么$\lim_{x\to x_0}f(x)=l$的充分必要条件是，对于一切序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U_r^0(a)$，只要$\lim_{n\to\infty}x_n=a$都有$\lim_{x\to\infty}f(x_n)=l$。

定理的直观意义是：当函数极限$\lim_{x\to x_0}f(x)=l$收敛时，自然$f(x)$在$x=a$附近的函数值是向l“聚拢”的，这是如果存在一个序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$每一项逐渐向a接近，那么序列对应的函数值序列$\{f(x_n)\}$自然以l为极限。在这种意义下，序列$\{x_n\}$只是$f(x)$函数极限的收敛“大势”中的“沧海一粟”。上述定理的证明是熟悉极限定义的一道很好的习题。

Proof. **归结定理的证明.**

一方面，如果$\lim_{x\to x_0}f(x)=l$且$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，我们用定义证明$\lim_{x\to\infty}f(x_n)=l$。即证明，对$\forall\varepsilon>0$，都存在$N\in\mathbb{N}^*$使得$|f(x_n)-l|<\varepsilon$对一切$n>N$成立。

我们首先利用$\lim_{x\to x_0}f(x)=l$的定义，对给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得$|f(x)-l|<\varepsilon$对一切$0<|x-x_0|<\delta$成立，注意δ是由ε决定的；再利用$\lim_{n\to\infty}x_n=a$的定义，对于上面的$\delta>0$，存在$N_0\in\mathbb{N}^*$使得$|x_n-a|<\delta$对一切$n>N$成立，同样地N由δ决定；注意到$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U_r^0(a)$，由$|x_n-a|<\delta$对一切$n>N$成立自然得出了$|f(x_n)-l|<\varepsilon$对一切$n>N$成立。于是用定义证明了$\lim_{x\to\infty}f(x_n)=l$。

另一方面，我们用反证法证明，如果对于一切序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U_r^0(a)$，只要$\lim_{n\to\infty}x_n=a$都有$\lim_{x\to\infty}f(x_n)=l$，那么函数极限$\lim_{x\to x_0}f(x)=l$。在反证法的逻辑下，我们要

在假定$f(x)$在x_0处极限不是l（发散或极限非l）的情况下，说明对于某些$\lim_{n\to\infty} x_n = a$推不出$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = l$。

我们首先利用极限发散的定义，$f(x)$在x_0处极限不是l说明存在$\varepsilon > 0$，对于$\forall\delta > 0$都存在某个x满足$|x-a| < \delta$，同时$|f(x)-l| > \varepsilon$。借助这一假设，我们试图狗仔使得$f(x_n)$不收敛于l的序列x_n。此时对于$\forall n \in \mathbb{N}^*$，在不收敛条件中取$\delta = \frac{1}{n}$，可以找到一个$x_n$满足$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$，同时$|f(x_n)-l| > \varepsilon$。由夹逼原理，我们有$\lim_{n\to\infty} x_n = a$；然而另一方面由于$|f(x_n)-l| > \varepsilon$，$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$不收敛于$l$。反证法完毕。 $\square$

上述定理的主要应用有两个，其一是借助函数极限计算一些序列极限，二是证明函数极限发散。我们下面将给出一个使用归结定理证明序列发散的题目，关于函数极限向序列极限的转化我们会在后续例题使用。

例 2. 证明极限$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$发散。

Proof. 我们考虑收敛于0的序列$x_n = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$，那么显然有

$$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n. \tag{4}$$

由于$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$不收敛，而$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$，根据归结定理的必要条件得出函数极限$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$发散。 $\square$

函数极限换元法

函数极限的换元方法虽然在课本上没有单独讨论，却是解题中方程重要的方法。换元法定理的一般叙述是比较麻烦的（也不容易理解），我们只通过例子理解其含义即可。例如特殊极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$，进行换元$y = \frac{1}{x}$，代入后得到关于$y$的函数$y\sin\left(\frac{1}{y}\right)$，而当$x\to 0$时有$y\to+\infty$，因此

$$\lim_{y\to\infty} y\sin\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{5}$$

可见，函数极限的换元包含对函数和收敛趋向同时的改变。

1.2 函数极限计算

与序列极限类似，函数极限的计算基本也不使用定义。大部分函数极限的题目都是考虑不定式的情形，因为这类极限不能直接使用极限的四则运算法则进行计算，最常见的例子便是特殊极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$，其分子$\sin x$和分母$x$在$x\to 0$时都是无穷小量。因此是$\frac{0}{0}$型不定式。类似地，还有形如$\frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, 0^0$等不定是情况。其中不定式$\frac{\infty}{\infty}$可以通过判别无穷大量量级计算，不定式$1^\infty$可以通过e的方法计算，不定式$\frac{0}{0}$则通常通过等价无穷小方法计算。接下来的篇幅我们将分别讨论三类方法。

量级估计法

与序列极限情形类似，量级估计法讨论的是$x \to +\infty$的无穷大量的比值极限，我们依然可以写出几个无穷大量的量级关系

$$\ln x \ll x \ll x^2 \ll \mathrm{e}^x \ll x^x, \quad x \to +\infty. \tag{6}$$

上述量级关系用函数极限描述为

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^x} = 0. \tag{7}$$

这些极限的证明都可以通过模仿序列极限的情形得到，但是需要依据函数极限的特点进行一些调整，来看下面的例题：

例 3. 证明$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\mathrm{e}^x} = 0$，其中参数$k \in \mathbb{N}^*$。

分析：为了使用二项式定理进行夹逼法则，我们需要将函数极限中的x转化为取整$[x]$进行分析。

Proof. 模仿序列极限的问题，我们试图对$\left|\frac{x^k}{\mathrm{e}^x}\right|$进行放缩并应用夹逼法则证明。根据二项式定理当$x \geq k+1$时有

$$\mathrm{e}^x \geq (1 + (\mathrm{e}-1))^{[x]} \geq \frac{[x]\cdot([x]-1)\cdots([x]-k)}{(k+1)!}(\mathrm{e}-1)^k, \tag{8}$$

其中第一步放缩利用了$x \geq [x]$。由此

$$\begin{aligned} 0 < \frac{x^k}{\mathrm{e}^x} \quad &< \quad \frac{x^k}{[x]\cdot([x]-1)\cdots([x]-k+1)} \cdot \frac{(k+1)!}{([x]-k)(\mathrm{e}-1)^k} \\ &\leq \quad \frac{x^k}{(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-k)} \cdot \frac{(k+1)!}{([x]-k)(\mathrm{e}-1)^k}, \end{aligned} \tag{9}$$

其中第二行的放缩利用了$[x] \geq x-1$。由于k是固定的，因此有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-k)} = 1. \tag{10}$$

另一方面我们还有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(k+1)!}{([x]-k)(\mathrm{e}-1)^k} = 0. \tag{11}$$

对式(9)用夹逼原理

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{[x]\cdot([x]-1)\cdots([x]-k+1)} \cdot \frac{(k+1)!}{([x]-k)(\mathrm{e}-1)^k} = 0. \tag{12}$$

□

e的方法

e的方法是在函数极限问题中最为普遍的方法之一，其使用于任何1^∞型极限。其理论依据是下述函数极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}. \tag{13}$$

相比序列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \tag{14}$$

函数极限(13)实际是更强的结论，因为函数极限(13)实际是无穷远点的双侧极限，不论是x趋向正无穷还是负无穷都可以得出极限为e结论，相对地序列极限(14)只考虑了n作为自然数趋向正无穷的情形。特别地，对极限(13)用换元$y=\frac{1}{x}$，可以得到一个等价形式：

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \mathrm{e}. \tag{15}$$

在解题过程中，形式(15)是更方便使用的。

与序列极限的情形类似，函数极限的e的方法实质上也是将待计算极限的函数值向e的极限(13)或(15)靠拢，然后计算多余的指数的极限。考虑下述例题。

例 4. 计算极限$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3}$。

分析：当$x\to+\infty$时有$\frac{x}{x-1}\to 1$和$x-3\to+\infty$，本题显然是1^∞型不定式。本题介绍e的方法的标准套路。

Proof. 对函数恒等变形

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3} = \left[\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right]^{\frac{x-3}{x-1}}. \tag{16}$$

其中方括号内的部分用$y=\frac{1}{x-1}$换元，当$x\to+\infty$时有$y\to 0+0$，由此

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1} = \lim_{y\to 0+0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \mathrm{e}. \tag{17}$$

另一方面

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x-1} = 1, \tag{18}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right]^{\frac{x-3}{x-1}} = \exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{x-1}\right] = \mathrm{e}. \tag{19}$$

□

等价无穷小方法

等价无穷小方法方法是不定式解题中计算最简便、效果最显著的计算方法，同时也是初学者容易错用的方法，使用前请务必理解等价无穷小的内涵。

我们曾经讨论过无穷大量的量级，实际上对于两个无穷小量而言我们也可以讨论其量级关系，用以指代两个无穷小量收敛于0的速度对比。例如当$x \to 0$时x^2和x^3都是无穷小量，但是显然当x很小时$|x^3|$比$|x^2|$小，这说明x^3收敛于0的速度比x^2快，这种情况我们称x^3是比x^2更高阶的无穷小量；另一方面，$\sin x$和x也是无穷小量，而$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$，这说明$x$和$\sin x$在$x \to 0$时大小相近。

为了方便起见，本节的等价无穷小只考虑$x \to 0$的情形。首先是关于无穷小量阶的定义

定义 1.5. 当$x \to 0$时设$f(x)$和$g(x)$是两个无穷小量（即$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$），我们有如下定义
*1.*称$f(x)$是比$g(x)$**高阶的无穷小量**，如果$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$，记为$f(x) = o(g(x))$。
*2.*称$f(x)$是比$g(x)$**低阶的无穷小量**，如果$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$，记为$g(x) = o(f(x))$。
*3.*称$f(x)$是与$g(x)$**同阶的无穷小量**，如果$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$，其中极限$l$是实数。
*4.*称$f(x)$是与$g(x)$**等价的无穷小量**，如果$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$，记为$f(x) \sim g(x)$。

以下等价的无穷小量需要同学们掌握，其中$x \to 0$:
1.三角函数 $\sin x \sim x$，$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$，$\tan x \sim x$。
2.对数和指数 $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$。在此基础还有推论$a^x - 1 \sim x \ln a$，其中$a > 0$。
3.反三角函数 $\arcsin x \sim x$，$\arctan x \sim x$。
4.其他 设参数$a \in \mathbb{R}$，$(1+x)^a - 1 \sim ax$。

其中等价无穷小$(1+x)^a - 1 \sim ax$可能不好理解，例如考虑$a = \frac{1}{2}$时，我们有

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}, \tag{20}$$

因此无穷小量$\sqrt{1+x} - 1$与无穷小量$\frac{x}{2}$等价。其余的几个无穷小量是直观切容易验证的。

我们通过下面的例题介绍等价无穷小的使用方法:

例 5. 计算极限$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(2x^2\right)}{3(\tan x)^2}$。

Proof. 根据等价无穷小关系$x \sim \sin x$有$\sin\left(2x^2\right) \sim 2x^2$，由此可以变形

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x^2\right)}{3\left(\tan x\right)^2} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(2x^2\right)}{2x^2}\cdot\frac{2x^2}{3x^2}\cdot\frac{3x^2}{3(\tan x)^2}\right] \\ &= \left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x^2\right)}{2x^2}\right]\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x^2}\right]\cdot\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)^2\right] \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}. \end{aligned} \tag{21}$$

实际上，式(21)中对函数$\frac{\sin\left(2x^2\right)}{3(\tan x)^2}$乘一项除一项的恒等变形，可以直观理解为将原极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x^2\right)}{3(\tan x)^2}$分子中的项$\sin\left(2x^2\right)$替换为等价无穷小量$2x^2$，将分母中的项$3(\tan x)^2$替换为等价无穷小量$3x^2$。等价无穷小替换后有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x^2\right)}{3\left(\tan x\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x^2}. \tag{22}$$

由此得出本题极限为$\frac{2}{3}$。 □

特别警告，等价无穷小变换只能在乘积式或分式中进行，因为其本质是式(21)中乘一项除一项的运算，而非直接的“替代”。我们来看如下的例子

例 6. 计算极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{x^3}$。

Proof. 首先给出正确的做法

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x - 1)}{x^3} \\ &= \left[\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\right]\cdot\left[\lim_{c\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}\right] = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{23}$$

一种错误的做法是，根据等价无穷小关系$\sin x \sim x$和$\tan x \sim x$，直接将极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{x^3}$分子中的$\sin x$和$\tan x$都替换为$x$，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - x}{x^3} = 0. \tag{24}$$

式(24)得出错误结果的原因是，虽然$\sin x \sim x$和$\tan x \sim x$，我们并没有任何理论保证两组等价无穷小的差$\sin x - \tan x$与$x - x$具有等价无穷小关系，因此上述计算是错误的。此外，在正确的解答中我们明白$\sin x - \tan x$是与$-\frac{x^3}{2}$等价的无穷小量，由此是比x更高阶的无穷小量。 □

初学者不能将等价无穷小理解为直接的替代，而是要理解等价无穷小是乘一项除一项等价变形的实质，由此等价只能在乘式和除式中使用，我们总结为下述定理：

定理 1.3. 当$x \to 0$时$f(x)$和$g(x)$是一组等价无穷小量，那么
*1.*分式极限$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{h(x)}$。
*2.*乘式极限$\lim_{x\to 0} f(x)h(x) = \lim_{x\to 0} g(x)h(x)$。

最后我们指出e的方法本质上可以与等价无穷小方法等效化，我们以此前例题中的极限$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3}$为例进行解释：我们可以对函数$\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3}$取对数计算：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3} = \lim_{x\to+\infty}\exp\left[(x-3)\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\right]. \tag{25}$$

由于$x \to +\infty$时$\frac{1}{x-1}$是无穷小量，所以有等价无穷小关系

$$\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right) \sim \frac{1}{x-1}, \tag{26}$$

于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3} = \exp\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x-1}\right] = \mathrm{e}. \tag{27}$$

e的方法和等价无穷小方法均将极限化简为$\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x-1}\right]$进行计算。

洛必达法则简介

洛必达法则是计算不定式$\frac{\infty}{\infty}$和$\frac{0}{0}$函数极限的方法，对部分题目洛必达法则可以快速计算极限。由于涉及导数，我们要在后半学期才学习洛必达法则，这里我们只做简要介绍。在期中考试中，由于我们没有学洛必达法则，如果使用洛必达法则计算错误或弄错了洛必达法则的使用条件，是得不到过程分的，故请谨慎使用。

考虑$\frac{\infty}{\infty}$和$\frac{0}{0}$型不定式极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$，这里$x_0$可以是实数或无穷远点，并且假定函数$f(x)$和$g(x)$均可导，并且满足$g'(x_0) \neq 0$和$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$收敛，那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{28}$$

特别地，如果极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$发散，通常不能说明极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$发散。

例如我们此前使用夹逼原理证明$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{\mathrm{e}^x} = 0$，其中$k \in \mathbb{N}^*$，证明非常复杂。实际上我们可以通过做$k$次洛必达法则得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{\mathrm{e}^x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{k!}{\mathrm{e}^x} = 0. \tag{29}$$

2 扩展延伸

2.1 扩展题概览

扩展延伸题部分难度较大，建议根据题目内容选择性阅读。

- 扩展习题1：中等难度，使用函数极限的直观理解分析收敛性并应用归结定理证明。
- 扩展习题2：简单难度，等价无穷小方法的几种变形。
- 扩展习题3：简单难度，方幂型极限，包括e的方法和取对数方法。
- 扩展习题4：中等难度，函数极限综合题。
- 扩展习题5：困难难度，归结定理反命题的否定。
- 扩展补充题1：中等难度，一些有难度的函数极限综合题。
- 扩展补充题2：中等难度，$\varepsilon-\delta$语言证明题。
- 扩展补充题3：中等难度，无穷小量量级分析综合题。
- 扩展补充题4：困难难度，函数极限换元法的加深理解。

2.2 扩展习题

题 1. 问极限$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)\sqrt{x}}{\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)\arctan(5x)}$是否存在，如存在请计算极限的值，不存在请证明。

分析：这类分析极限收敛性的题目，需要我们首先根据函数的形式猜测出极限收敛还是发散。本题主需要我们分项分析$x\to+\infty$时$\sin\left(x^2\right),\sqrt{x},\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right),\arctan(5x)$这四项对于极限的作用，是函数极限的综合题。

Proof. 我们分别考虑$\sin\left(x^2\right),\sqrt{x},\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right),\arctan(5x)$这四项对于极限的作用：当$x\to+\infty$时$\arctan(5x)$收敛于$\frac{\pi}{2}$，而$\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)$以及$\sqrt{x}$是无穷大量，并且$\sqrt{x}$比$\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)$具有更高的量级，结合上述可以得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)\arctan(5x)}=+\infty. \tag{30}$$

最后三角函数$\sin\left(x^2\right)$则发散，但是是有界的。

我们把极限拆成两个部分的乘积

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)\sqrt{x}}{\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)\arctan(5x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x}}{\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)\arctan(5x)}\cdot\sin\left(x^2\right)\right]. \tag{31}$$

由于$\sin\left(x^2\right)$在$[-1,1]$震荡，极限可以看作一个无穷大量乘以一个震荡的函数，于是，这使得乘积式$\frac{\sqrt{x}}{\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)\arctan(5x)}\cdot\sin\left(x^2\right)$有时为0，有时很大，这样的极限必然是发散的。**（上述分析使得我们有了证明的目标：证明极限发散。）**

严格证明极限的发散需要用的归结定理：我们选择两个趋于$+\infty$的序列$x_n = \sqrt{n\pi}$和$y_n = \sqrt{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$。我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x_n}}{\ln\left(1+x_n^{\frac{3}{2}}\right)\arctan\left(5x_n\right)}\cdot\sin\left(x_n^2\right)\right]=0. \tag{32}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{y_n}}{\ln\left(1+y_n^{\frac{3}{2}}\right)\arctan\left(5y_n\right)}\cdot\sin\left(y_n^2\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{y_n}}{\ln\left(1+y_n^{\frac{3}{2}}\right)\arctan\left(5y_n\right)}=+\infty. \tag{33}$$

根据归结原理，如果题目中的极限收敛，那么序列x_n和y_n代入得到的序列极限必须收敛于同一个值，即函数极限。由于我们找到了两个序列收敛到不同的序列极限，这说明本题的函数极限发散。 □

题 2. 使用等价无穷小方法计算下列极限

1.$\lim_{x\to1}\tan\left(\frac{\sin\pi x}{4(x-1)}\right)$

2.$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$，其中参数$a>0$

3.$\lim_{x\to0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}$

分析：本题各个小问均使用等价无穷小方法，但是在常规等价无穷小方法的基础上需要做出一些改进。第一问需要我们首先通过换元转化到0附近的极限然后使用等价无穷小方法避免犯错，第二问需要我们首先将序列极限转化为函数极限再使用等价无穷小方法，第三问需要我们先代数变形再使用等价无穷小方法。

Proof. **1.**我们计算$\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{4(x-1)}$，首先换元$y=x-1$得

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{4(x-1)}=\lim_{y\to0}\frac{\sin\left(\pi y+\pi\right)}{4y}=\lim_{y\to0}\frac{-\sin\pi y}{4y}=\lim_{y\to0}\frac{-\pi y}{4y}=-\frac{\pi}{4}. \tag{34}$$

由此$\lim_{x\to1}\tan\left(\frac{\sin\pi x}{4(x-1)}\right)=-1$。

2.本题为序列极限，我们将其改写为函数极限计算。根据归结定理，我们有序列极限和函数极限的对应关系

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right). \tag{35}$$

注意等式(35)成立的条件是函数极限$\lim_{x\to+\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)$收敛，否则归结定理无效。接下来对函数极限换元$y=\frac{1}{x}$：

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{y\to0+0}\frac{a^y-1}{y}=\ln a. \tag{36}$$

由于函数极限收敛，等式(35)成立，所以本题序列极限收敛于$\ln a$。

3.本题因为分子根号的存在难以直接使用等价无穷小，应首先进行分式有理化。

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1-\cos x}{2x(1-\cos\sqrt{x})},\tag{37}$$

这里使用了$\lim_{x\to 0+0}1+\sqrt{\cos x}=2$。根据等价无穷小关系$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$和$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{x}{2}$得

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1-\cos x}{2x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{x^2}{2}}{2x\cdot\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.\tag{38}$$

□

题 3. 计算下列方幂型极限：
1.$\lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
2.$\lim_{x\to 0+0}x^x$
3.$\lim_{x\to 0+0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

分析：本题各个小问都是方幂型极限：第一问是1^∞型，用e的方法解题，需要结合等价无穷小方法；第二问和第三问不能使用e的方法，需要我们取对数分析。其中第三问与e的极限$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$容易混淆，但是要注意收敛点的不同。

Proof. **1.**为了应用e的方法，我们对极限进行变形

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{xe^x-x\pi^x}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{xe^x-x\pi^x}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{x\pi^x+1}{x(e^x-\pi^x)}}\right]^{\frac{e^x-\pi^x}{x(x\pi^x+1)}}.\end{aligned}\tag{39}$$

由于当$x\to 0$时$\frac{xe^x-x\pi^x}{x\pi^x+1}$是无穷小量，使用换元$y=\frac{xe^x-x\pi^x}{x\pi^x+1}$得

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{xe^x-x\pi^x}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{x\pi^x+1}{x(e^x-\pi^x)}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e\tag{40}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{xe^x-x\pi^x}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{x\pi^x+1}{x(e^x-\pi^x)}}\right]^{\frac{e^x-\pi^x}{x(x\pi^x+1)}}=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\pi^x}{x\left(x\pi^x+1\right)}\right].\tag{41}$$

接下来由于$\lim_{x\to 0}\left(x\pi^x+1\right)=1$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\pi^x}{x\left(x\pi^x+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\pi^x}{x}.\tag{42}$$

结合等价无穷小关系有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\pi^x-1}{x}=\ln\pi.\tag{43}$$

由此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\pi^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\pi^x-1}{x}=1-\ln\pi. \tag{44}$$

综上$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\mathrm{e}^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{1-\ln\pi}=\frac{\mathrm{e}}{\pi}$。

2.本题不能使用e的方法，我们采用取对数的方法，由于

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=\lim_{x\to 0+0}\exp(x\ln x)=\exp\left(\lim_{x\to 0+0}x\ln x\right). \tag{45}$$

我们需要计算$\lim_{x\to 0+0}x\ln x$。我们进行分析：当$x\to 0+0$时，x是无穷小量而$\ln x$是无穷大量，而根据此前的量级分析，对数项对极限的影响是小于线性项的，使用我们猜测这一极限受无穷小量x影响更大，所以极限是0。为了严格说明上述，我们用换元$y=\frac{1}{x}$：

$$\lim_{x\to 0+0}x\ln x=\lim_{y\to +\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y}=-\lim_{y\to +\infty}\frac{\ln y}{y}=0, \tag{46}$$

其中极限$\lim_{y\to +\infty}\frac{\ln y}{y}=0$是无穷大量量级估计的经典结论，可以使用夹逼法则证明。因此本题极限为$\mathrm{e}^0=1$。

3.本题依然使用取对数的方法，注意到

$$\lim_{x\to 0+0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0+0}\exp\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\exp\left[\lim_{x\to 0+0}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]. \tag{47}$$

注意到当$x\to 0+0$时，x是无穷小量而$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$是无穷大量，为了明确其关系我们使用换元$y=\frac{1}{x}$得

$$\lim_{x\to 0+0}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to +\infty}\frac{\ln(1+y)}{y}=0. \tag{48}$$

因此本题极限为$\mathrm{e}^0=1$。 □

题 4. 设$a_1,\cdots,a_p$是p个正实数，满足$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_p$。计算下面两个极限，并对比其区别

1.$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}$

2.$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}$

分析 本题两问形式上类似，但是第一问是1^∞型不定式，第二问则与夹逼原理经典问题类型相似。

Proof. **1.**进行变形

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}} \\
= & \lim_{x\to 0+0}\left[1+\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}-1\right)\right]^{\frac{1}{x}} \\
= & \lim_{x\to 0+0}\left(\left[1+\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}-1\right)\right]^{\frac{p}{\left(a_1^x-1\right)+\left(a_2^x-1\right)+\cdots+\left(a_p^x-1\right)}}\right)^{\frac{\left(a_1^x-1\right)+\left(a_2^x-1\right)+\cdots+\left(a_p^x-1\right)}{px}} \\
= & \exp\left[\lim_{x\to 0+0}\frac{\left(a_1^x-1\right)+\left(a_2^x-1\right)+\cdots+\left(a_p^x-1\right)}{px}\right],
\end{aligned}
\tag{49}
$$

其中第三步化简利用了$\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}-1$是无穷小量，所以

$$
\lim_{x\to 0+0}\left[1+\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}-1\right)\right]^{\frac{p}{\left(a_1^x-1\right)+\left(a_2^x-1\right)+\cdots+\left(a_p^x-1\right)}}=\mathrm{e}. \tag{50}
$$

根据等价无穷小性质有

$$
\lim_{x\to 0+0}\frac{a_j^x-1}{x}=\ln\left(a_j\right),\quad j=1,2,\cdots,p. \tag{51}
$$

由此

$$
\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{\sum_{j=1}^{p}\ln\left(a_j\right)}{p}}=\sqrt[p]{\prod_{j=1}^{p}a_j}. \tag{52}
$$

2.用夹逼原理

$$
\frac{a_1}{p^{\frac{1}{x}}}=\left(\frac{a_1^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}\le\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}\le\left(\frac{pa_1^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}=a_1. \tag{53}
$$

由于

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{a_1}{p^{\frac{1}{x}}}=a_1. \tag{54}
$$

因此本题极限为a_1。 □

题 5. 判断以下命题正误，若正确请证明，不正确给出反例，其中$f(x)$是在全体实数定义的函数

1.若对任意$a\in\mathbb{R}$均有$\lim_{n\to\infty}f\left(n+a\right)=0$，则必有$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$。

2.若对任意$a\in\mathbb{R}$均有$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{a}{n}\right)=0$，则必有$\lim_{x\to 0}f(x)=0$。

分析 本题的两个命题都是不一定成立的，反例的构造对于初学者来说可能有些晦涩。选择这道题的主要目的是让大家更直观的体会归结定理的含义：根据归结定理$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$我们自然有$\lim_{n\to\infty}f\left(n+a\right)=0$对一切$a$成立，可是反过来并不对，即便从许多序列$\{f(n+a)\}_{n=1}^{\infty}$来看函数值序列收敛到0，也无法保证整体函数极限$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$的收敛，这就好比“管中窥豹”一样，难知全身。

Proof. **1.**构造反例

$$f(x)=\begin{cases}1 \quad, \quad x=n+\frac{1}{n}, \quad n\in\mathbb{N}^*/\{1\},\\ 0 \qquad 其他情况.\end{cases} \tag{55}$$

也就是说f只在形如$x=n+\frac{1}{n}$的点函数值为1，其余大部分点的函数值为0。

对于每一个$a\in\mathbb{R}$，点列$\{n+a\}_{n=1}^{\infty}$至多只包含一个值为1的点，其余点值总为0，所以$\lim_{n\to\infty}f(n+a)=0$。而序列$\left\{n+\frac{1}{n}\right\}$趋于$+\infty$，且$\lim_{n\to+\infty}f\left(n+\frac{1}{n}\right)=1$，根据归结定理函数极限$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$不成立。

2.构造反例

$$f(x)=\begin{cases}1 \quad, \quad x=\frac{1}{n\sqrt[n]{2}}, \quad n\in\mathbb{N}^*,\\ 0 \qquad 其他情况.\end{cases} \tag{56}$$

也就是说f只在形如$x=\frac{1}{n\sqrt[n]{2}}$的点函数值取1，其余大部分点的函数值为0。利用相同的方法显然有$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$不成立。但是对于给定a，序列$\left\{\frac{a}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$，其中至多只包含一个形如$\frac{1}{n\sqrt[n]{2}}$的数使得该点函数值取1，这一结论可以用反证法说明：若不然，存在$\frac{a}{m_1}$和$\frac{a}{m_2}$都可以写成$\frac{1}{n\sqrt[n]{2}}$的形式，即：

$$\frac{a}{m_1}=\frac{1}{n_1\sqrt[n_1]{2}}, \quad \frac{a}{m_2}=\frac{1}{n_2\sqrt[n_2]{2}}, m_1,m_2,n_1,n_2\in\mathbb{N}^*, n_1\neq n_2, m_1\neq m_2. \tag{57}$$

除法得

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{n_2}{n_1}\cdot 2^{\frac{1}{n_2}-\frac{1}{n_1}}. \tag{58}$$

由于$m_1,m_2,n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$且$n_1\neq n_2$，因此有$2^{\frac{1}{n_2}-\frac{1}{n_1}}$是无理数，矛盾。因此序列$\left\{\frac{a}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$，其中至多只包含一个形如$x=\frac{1}{n\sqrt[n]{2}}$的数，故$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{a}{n}\right)=0$。 □

2.3 扩展补充题

补 1. 计算下列极限

1.$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x\right)$。

2.$\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin(2x)}{x^3}$。

3.$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$。

4.$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}$。

补 2. 设$f(x)$和$g(x)$在$x=a$的一个去心邻域有定义，设$\lim_{x\to a}f(x)=c$且$\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$，其中$0<c<1$。用$\varepsilon-\delta$语言证明$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=0$。

补 3. 已知$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$，计算参数$a,b$的所有可能取值。

补 4. 设$f(x)$在$x=0$的邻域里有定义，回答下列问题：

1.证明$\lim_{x\to 0} f(x)$收敛的充分必要条件是$\lim_{x\to 0} f(x^3)$收敛。

2.问$\lim_{x\to 0} f(x)$收敛与$\lim_{x\to 0} f(x^2)$收敛的命题充分必要性如何，说明你的结论。