傅里叶级数

谢彦桐
北京大学数学科学学院

最后更新时间：2022年8月

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。

1 知识内容理解

本节主要研究傅里叶级数的相关知识，我们从傅里叶级数的引入，计算和相关性质三个角度来讨论。

1.1 准备

本节主要介绍傅里叶级数是如何引入的。本节的内容或许对做题意义不大，但是会大大提升对于傅里叶级数内涵的理解。

傅里叶级数的想法

1747年，数学家达朗贝尔在研究弦的振动时提出了如下的方程：用函数$u(t,x)$表示t时刻位置x处弦的振动幅度，其中位置$x\in[0,A]$，那么函数$u(t,x)$满足下述偏微分方程

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & ,t\geq 0,\ x\in[0,A],\\ u(t,0)=u(t,A)=0 & ,t\geq 0,\end{cases}\tag{1}$$

其中$c>0$是与弦材料有关的参数，边界条件$u(t,0)=u(t,A)=0$表示弦的两端是固定的。弦振动最重要的例子便是声波，特别是有弦乐器产生的声波，上述方程可以描述声波随时间t的演化，具有很强的实际应用价值。

此后，不少数学家如柯西、泰勒和伯努利等都致力于波方程(1)的研究，并提出了波方程(1)的一种形式解：对于正整数$n\in\mathbb{N}^*$，下述函数

$$u_n(t,x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{A}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{A}\right).\tag{2}$$

我们可以看到，当固定t时，$u_n(t,x)$是关于x的正弦函数，具有振动的性质。当$n=1$时，$u_n(t,x)$被称为基音，当$n\geq 1$时，$u_n(t,x)$被称为和音。实际上，人们知道现实中弦振动的声音都是基音与和音的组合。从波方程的角度下，我们也可以对一些列$u_n(t,x)$进行线性组合：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\left(\frac{n\pi x}{A}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{A}\right), \tag{3}$$

其中α_n是系数。可以验证，这样的组合得到的波函数$u(t,x)$是波方程(1)的解，而通过对不同系数α_n的选取，我们可以组合出各式各样的波函数的解。在解(3)中，如果我们固定t，并取$B_n=\alpha_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{A}\right)$，此时可以将$u(t,x)$写成正弦函数的线性组合

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{A}\right). \tag{4}$$

后来，欧拉提出如下猜想：考虑到三角函数是周期函数，那么任意一个以2π为周期的函数$f(x)$，是否可以写成一系列三角函数$\cos(nx)$和$\sin(nx)$的线性组合呢？例如寻找一系列系数$\{a_n\}$和$\{b_n\}$使得

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right). \tag{5}$$

换种角度看，我们希望任意函数$f(x)$都可以写成不同频率三角函数的组合。即便同时代的数学家都赞许欧拉的三角函数分解的想法，但是当时的人们并不能给出完整的三角函数分解理论。直到数学家傅里叶研究热方程的过程中，在研究热方程解的时候又一次将解写成了三角函数分解的形式，人们再次重视三角函数分解的重要性。傅里叶首次提出，如果分解(5)存在，那么傅里叶系数满足

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

从此，三角函数分解被称为**傅里叶级数**或**傅里叶展开**。

三角函数集的归一正交性

这一部分要涉及线性代数的知识，同学们可以选择性阅读。本节的目标是建立傅里叶级数展开与有限维空间的正交分解的统一。

我们之前学习一致收敛时，曾经提到过将函数看作无穷维向量的方法。设$f(x)$是以2π为周期的函数，我们自然也可以限制在一个周期$[-\pi,\pi]$讨论$f(x)$。也即

$$|f(x)\rangle=\left(f(-\pi),\cdots,f(t),\cdots,f(\pi)\right), \tag{7}$$

这就相当于将函数f在周期$[-\pi,\pi]$的各点函数值列成一排，形成一个行向量，只不过上述向量是无穷维的。

在有限维线性空间里，我们定义过两个向量正交和向量模长的概念，例如二维空间中的向量$\mathbf{e}_1=(1,0)$和$\mathbf{e}_2=(0,1)$，由于内积

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2=1\cdot 0+0\cdot 1=0, \tag{8}$$

我们有向量$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_2$正交，正交的几何意义便是几何空间中的垂直。另一方面，我们可以计算向量的模长

$$|\mathbf{e}_1|=\sqrt{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)}=1,\ |\mathbf{e}_2|=\sqrt{(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)}=1. \tag{9}$$

因此$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_2$组成正交的单位向量组。而所谓正交分解的概念，就是可以将二维空间的每一个向量写成单位正交向量$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_2$的线性组合

$$\mathbf{e}=(c,d)=c\mathbf{e}_1+d\mathbf{e}_2. \tag{10}$$

在有限维空间尤其是二维空间中，用正交向量组的线性组合表示一般的向量是深入人心的想法，而单位正交向量组就犹如组成线性空间的基石。

现在我们考虑$[-\pi,\pi]$上的函数$f(x)$构成的无限维空间，我们仍希望用正交的向量组（函数组）表示一般的向量（函数），我们需要首先推广正交和模长的概念。而第一步是定义函数的内积，我们假定$[-\pi,\pi]$上的函数$f(x)$和$g(x)$，我们逐步讨论：

1.内积 有限维向量的内积定义为各个分量乘积的和，对于函数我们考虑$\sum_{t\in[-\pi,\pi]}f(t)g(t)\approx\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x$，因此可以从积分的视角定义函数的内积

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{11}$$

2.正交 在内积的基础上，函数$f(x)$和$g(x)$的正交定义为

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=0. \tag{12}$$

3.范数 无限维向量（函数）的模长一般称为范数，其定义依然是自身内积的开方

$$\|f\|=\left(\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

这里为了避免与绝对值混淆，函数的范数使用两竖杠符号。

下一个问题是，函数空间中是否存在一系列范数为1且正交的向量组呢？答案是肯定的，我们考虑$[-\pi,\pi]$上的三角函数组

$$\Gamma=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\cdots\right\}. \tag{14}$$

这些三角函数的积分满足下述性质

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x=0\quad,\quad m,n\in\mathbb{N}^*,\ m\neq n, \tag{15}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x=0\quad,\quad m,n\in\mathbb{N}^*, \tag{16}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x=\pi\quad,\quad n\in\mathbb{N}^*. \tag{17}$$

上述性质及称为三角函数集Γ的**归一正交性**。因此可以看到，将函数$f(x)$写成傅里叶级数式的三角函数求和，其实际意义与使用正交单位向量组分解有限维空间的向量是一致的。对于函数空间来说，三角函数组Γ就好比基石，用以组装复杂的函数。

1.2 傅里叶级数计算

本节讨论的周期函数$f(x)$的傅里叶级数的计算，特别地我们总假设$f(x)$在一个周期上可积，并不假定$f(x)$是连续的。

周期为2π函数的傅里叶级数

考虑到Γ中的三角函数皆为2π周期函数，我们假定$f(x)$是以2π为周期的函数，我们限制在一个周期$[-\pi,\pi]$讨论$f(x)$，并假定$f(x)$在一个周期$[-\pi,\pi]$可积。

我们希望$f(x)$可以写出傅里叶级数的形式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right). \tag{18}$$

实际上，**只有部分函数可以写成傅里叶级数的三角函数线性组合**。然而在假定展开(18)成立的基础上，我们能由$f(x)$推出傅里叶系数a_n和b_n的取值：在式(18)左右同乘$\cos mx$并在$[-\pi,\pi]$积分，我们假定逐项积分可以运算（实际上大多数情况不可运算）

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x\right)\\ &= a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos mx\mathrm{d}x=\pi a_m.\end{aligned} \tag{19}$$

由此得出傅里叶系数的值

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x. \tag{20}$$

这里可以看到，将傅里叶级数中的常数项写成$\frac{a_0}{2}$也是为了傅里叶系数记忆的方便。我们称满足系数(20)的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{21}$$

为**2π周期函数$f(x)$的傅里叶级数**。记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right). \tag{22}$$

对于$f(x)$的傅里叶级数和傅里叶系数，我们有非常重要的说明：对于大多数$f(x)$而言，$f(x)$的傅里叶级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$与$f(x)$均不相等，而傅里叶系

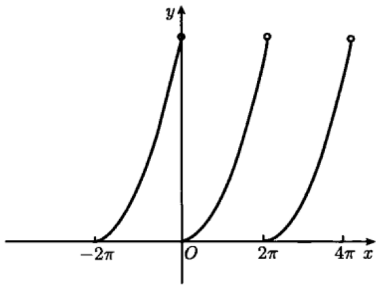

图 1: 函数$f(x)$示意图。

数a_n和b_n的值只是在假定等式(18)成立的基础上推出来的。对于大多数问题，其虽然要求我们求某函数$f(x)$的傅里叶级数，我们并不能推断该傅里叶级数等于$f(x)$，我们需要做的只是通过定积分计算出傅里叶系数，然后组装成傅里叶级数即可。

例 1. $f(x)$是以2π为周期的函数，且$f(x) = x^2$在$[0, 2\pi)$成立，求$f(x)$的傅里叶级数。

分析：我们需要注意的是，$f(x) = x^2$仅在$[0, 2\pi)$成立，所以$f(x)$在$\mathbb{R}$的图像（如图所示）是存在间断点的。另一方面，计算傅里叶系数的积分过程中。处理方法是反复利用三角函数的性质分部积分，这一方法在类似习题特别常见。

Proof. 计算傅里叶级数的实质是计算傅里叶系数，然而考虑到$f(x)$是以$2k\pi$点为间断点2π为周期的函数，直接根据式(20)计算$[-\pi, \pi]$的积分不方便，在$[0, 2\pi]$计算积分是等价的。另一方面，由于公式的不同，我们需要分开计算a_0, a_n, b_n：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{8\pi^2}{3}. \tag{23}$$

然后

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x = \frac{4}{n^2}, \end{aligned} \tag{24}$$

其中第二个等号和第三个等号都使用了分部积分，特别地$\frac{1}{n}\mathrm{d}\sin nx = \cos nx\mathrm{d}x$。最后

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n\pi}x^2\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\mathrm{d}x \\ &= -\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{4\pi}{n}. \end{aligned} \tag{25}$$

最后组装为傅里叶级数

$$\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cos nx}{n^2}-\frac{4\pi\sin nx}{n}\right). \tag{26}$$

□

对于一些没有给出函数值的函数$f(x)$，我们也可以利用定积分的性质研究傅里叶系数的关系：

例 2. 设以2π为周期的函数$f(x)$的傅里叶系数为a_0, a_n, b_n，记$g(x) = f(\pi - x)$，写出$g(x)$的傅里叶级数。

分析：通过换元法，我们可以从$f(x)$的傅里叶系数计算$g(x)$的傅里叶系数。

Proof. 根据题意有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x. \tag{27}$$

计算$g(x)$的傅里叶系数A_0, A_n, B_n，利用换元$t=\pi-x$有，注意要将傅里叶系数A_0, A_n, B_n分开计算

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\pi-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t=a_0, \tag{28}$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)\cos n(\pi-t)\mathrm{d}t=(-1)^n a_n,\ n\in\mathbb{N}^* \tag{29}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin n(\pi-t)\mathrm{d}t=(-1)^{n-1} b_n,\ n\in\mathbb{N}^* \tag{30}$$

这里使用了诱导公式

$$\cos n(\pi-t)=(-1)^n\cos nt,\ \sin n(\pi-t)=(-1)^{n-1}\sin nt, \tag{31}$$

并且利用f以2π为周期的性质，傅里叶系数在$[0,2\pi]$或$[-\pi,\pi]$积分意义相同。写出b_n的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n a_n\cos nx+(-1)^{n-1}b_n\sin nx\right)=\frac{a_0}{2}+(-1)^n\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx-b_n\sin nx\right). \tag{32}$$

□

奇函数或偶函数的傅里叶级数

本节我们假定$f(x)$是以2π为周期的奇函数或偶函数。我们限制在一个周期$[-\pi,\pi]$讨论$f(x)$，在此区间里$f(x)$仍为奇函数或偶函数，并假定$f(x)$在一个周期$[-\pi,\pi]$可积。

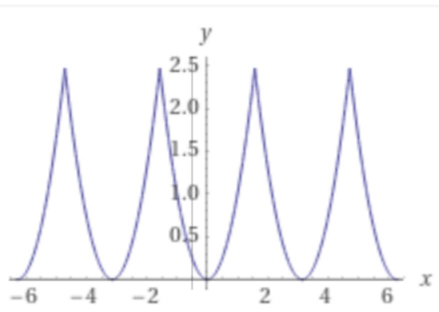

图 2: 函数$f(x)$示意图。

如果$f(x)$在$[-\pi,\pi]$为奇函数，根据(20)，被积函数$f(x)\cos nx$在$[-\pi,\pi]$上为奇函数，使用傅里叶系数$a_n=0$对$n\in\mathbb{N}$成立，因此$f(x)$的傅里叶系数简化为

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx. \tag{33}$$

因此奇函数的傅里叶级数被称为**正弦级数**。

类似地，如果$f(x)$在$[-\pi,\pi]$为偶函数，根据(20)，被积函数$f(x)\sin nx$在$[-\pi,\pi]$上为奇函数，使用傅里叶系数$b_n=0$对$n\in\mathbb{N}^*$成立，因此$f(x)$的傅里叶系数简化为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx. \tag{34}$$

因此偶函数的傅里叶级数被称为**余弦级数**。

计算奇函数或偶函数的傅里叶级数，我们只需要计算一半的傅里叶系数，可以减小工作量：

例 3. $f(x)$是以2π为周期的函数，且$f(x)=x^2$在$[-\pi,\pi)$成立，求$f(x)$的傅里叶级数。

分析：如图所示，根据周期性，本题的函数$f(x)$为偶函数。需要着重区分本题函数与例题1函数的区别，即便形式上它们具有相同的表达式。

Proof. 考虑到$f(x)$在$(-\pi,\pi)$为偶函数，只需计算傅里叶系数a_0和a_n即可：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2. \tag{35}$$

以及

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2},\end{aligned} \tag{36}$$

需要注意$\cos n\pi = (-1)^n$。由此写出余弦级数

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2}\cos nx. \tag{37}$$

□

任意周期的傅里叶级数

这一节我们假定$f(x)$是以$2l$为周期的周期函数，因此我们可以限制在一个周期$[-l,l]$讨论，然后假定$f(x)$在$[-l,l]$可积。

如果想写出$2l$周期函数的三角函数展开，就需要三角函数本身也以$2l$为周期，即具有$\sin\frac{\pi x}{l}$和$\cos\frac{\pi x}{l}$的形式，亦即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{38}$$

模仿2π周期傅里叶系数的推导方式，可以得到

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x. \tag{39}$$

计算$2l$周期函数傅里叶级数的方法与此前一致，通过公式(39)计算傅里叶系数即可。

$2l$周期函数$f(x)$傅里叶级数还有一种理解方式：我们对$f(x)$做伸缩变换$g(y) = f(\frac{\pi}{l}y)$，得到2π周期函数$g(x)$和傅里叶级数

$$f(\frac{\pi}{l}y) = g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos ny + b_n \sin ny\right). \tag{40}$$

进行变换$x = \frac{\pi}{l}y$得到

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{41}$$

其中傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos ny\mathrm{d}y = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \tag{42}$$

与式(39)一致。

周期延拓和傅里叶级数

这一节我们讨论非周期函数的傅里叶级数，写出这类函数傅里叶级数的方法是首先通过**周期延拓**得到一个周期函数，然后写出其傅里叶级数。我们假定讨论的非周期函数都是有界闭区间的可积函数。

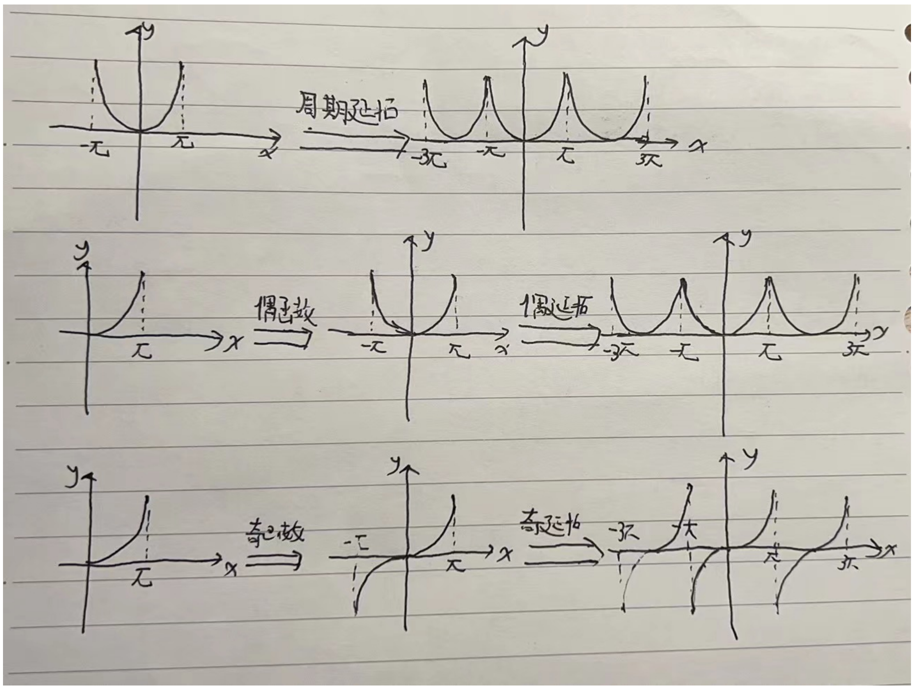

图 3: 三种延拓方式的函数图像示意图。

这里强调延拓的概念：给定有限区间$[a,b]$上的函数$f(x)$，延拓是指构造一个在$\mathbb{R}$定义的函数$F(x)$，其中F在区间$[a,b]$上的函数值与f相同。从图像上看，$F(x)$的图形相当于将f在区间$[a,b]$上的图像延伸到整个实数的定义域。而周期延拓，自然是在确保F是周期函数的基础上进行的延拓。

周期延拓大致有三种情况：

1.常规延拓 设函数$f(x)$在区间$[-\pi,\pi)$定义（或是某个长为2π的区间），我们可以将这个有限区间的函数值在各个区间$[2k\pi-\pi,2k\pi+\pi)$不断重复，得到定义在$\mathbb{R}$的函数$F(x)$，即

$$F(2k\pi+t)=f(t),\ k\in\mathbb{Z},\ t\in[-\pi,\pi). \tag{43}$$

由此就得到一个2π周期函数$F(x)$。我们将F的傅里叶级数称为有界区间$[-\pi,\pi)$定义的函数f的傅里叶级数。

2.偶延拓 设函数$f(x)$在区间$[0,\pi]$定义，为了得到一个在$\mathbb{R}$定义的2π周期偶函数$F(x)$，我们分为两步：第一步，将$f(x)$对称为一个$[-\pi,\pi]$上的偶函数$f_1(x)$，即

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x) & ,x\in[0,\pi], \\ f(-x) & ,x\in[-\pi,0). \end{cases} \tag{44}$$

然后再使用常规的延拓得到，将$[-\pi,\pi]$上的偶函数$f_1(x)$延拓为定义在$\mathbb{R}$的函数$F(x)$：

$$F(2k\pi+t)=f_1(t),\ k\in\mathbb{Z},\ t\in[-\pi,\pi). \tag{45}$$

显而易见，延拓得到的函数F是$\mathbb{R}$上的偶函数，因此这一延拓过程称为偶延拓。另一方面，由于偶函数F的傅里叶级数是余弦级数，我们将F的余弦级数称为定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$的余弦级数。

3.奇延拓 设函数$f(x)$在区间$[0,\pi]$定义，为了得到一个在$\mathbb{R}$定义的2π周期奇函数$F(x)$，我们分为两步：第一步，将$f(x)$对称为一个$[-\pi,\pi]$上的奇函数$f_1(x)$（注：如果$f(0)\neq 0$可能导致f_1无法成为奇函数，但是考虑到傅里叶系数的定义与单个点函数值无关，我们可以忽略0处函数值的影响），即

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x) & ,x\in[0,\pi], \\ -f(-x) & ,x\in[-\pi,0). \end{cases} \tag{46}$$

然后再使用常规的延拓得到，将$[-\pi,\pi]$上的奇函数$f_1(x)$延拓为定义在$\mathbb{R}$的函数$F(x)$:

$$F(2k\pi+t)=f_1(t),\, k\in\mathbb{Z},\, t\in[-\pi,\pi). \tag{47}$$

显而易见，延拓得到的函数F是$\mathbb{R}$上的奇函数，因此这一延拓过程称为奇延拓。另一方面，由于奇函数F的傅里叶级数是正弦级数，我们将F的正弦级数称为定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$的正弦级数。

有关周期延拓、奇延拓和偶延拓，还可以通过图3直观理解。一个关于周期延拓的实例是，例题1中我们讨论的虽然是2π周期函数$f(x)$的傅里叶级数，但是这个傅里叶级数也可以看成定义在单个周期$[0,2\pi)$上的函数的傅里叶级数。总而言之，延拓的方法大大扩充傅里叶级数的概念，使得我们可以对有限区间的非周期函数定义傅里叶级数、正弦级数或余弦级数。

最后，我们讨论两种特殊的情况：

1.一般我们默认常规的周期延拓是对长为2π的区间（如$[-\pi,\pi)$或$[0,2\pi)$）上的函数进行的，这样延拓得到的函数是2π周期函数。实际上，如果我们考虑定义在一般区间$[-l,l)$的函数$f(x)$的傅里叶级数，我们可以将f首先延拓为$\mathbb{R}$上周期为$2l$的函数，然后计算$2l$周期函数的傅里叶级数作为f的傅里叶级数。

2.一般我们默认奇延拓或偶延拓是对区间$[0,\pi]$或$[-\pi,0]$这样以0为端点且长为π的区间上的函数进行的，这样延拓得到的函数是2π周期函数。实际上，如果我们考虑定义在一般区间$[0,l]$的函数$f(x)$的傅里叶级数，我们可以将f延拓为$\mathbb{R}$上周期为$2l$的奇函数或偶函数，然后计算$2l$周期函数的正弦/余弦级数作为f的正弦/余弦级数。

例 4. 设$f(x)=x^2$在区间$[0,\pi]$定义，计算$f(x)$的正弦级数，余弦级数和傅里叶级数。

分析：本题需要注意f的定义域是$[0,\pi]$，所以虽然奇延拓和偶延拓得到的是2π周期函数，常规周期延拓得到却是周期π的函数。建议通过画图的方法是延拓更加易理解。本题示意图如图4所示。

Proof. 首先对$f(x)$进行偶延拓得到周期函数$F(x)$，得到的是满足$F(x)=x^2$在$x\in[-\pi,\pi]$的2π周期函数。$F(x)$是偶函数，且余弦级数在例题3已经计算过，因此

$$f(x)\text{的余弦级数：}\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx. \tag{48}$$

首先对$f(x)$进行奇延拓得到周期函数$G(x)$，得到的是满足$G(x)=x^2$在$x\in[0,\pi]$成立，但$G(x)=-x^2$在$x\in[-\pi,0)$成立的2π周期函数。$F(x)$是奇函数，计算其正弦级数

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{n\pi}x^2\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=(-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}-\frac{4\left[1-(-1)^n\right]}{n^3\pi}, \end{aligned} \tag{49}$$

特别地，第二个等号利用了被积函数$G(x)\sin nx$是偶函数的性质。因此

$$f(x)\text{的正弦级数：}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}-\frac{4\left[1-(-1)^n\right]}{n^3\pi}\right)\sin nx. \tag{50}$$

最后对$f(x)$进行周期延拓得到π周期函数$H(x)$，满足$H(x)=x^2$在$x\in[0,\pi)$成立，因此计算其傅里叶系数（注：这里傅里叶系数的计算过于复杂，可以不计算）

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}, \tag{51}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos\frac{nx}{2}\mathrm{d}x=\frac{4\left(\pi^2n^2-8\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+16\pi n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^3\pi}, \tag{52}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin\frac{nx}{2}\mathrm{d}x=-\frac{4\left(\pi^2n^2-8\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-16\pi n\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+32}{n^3\pi}, \tag{53}$$

代入得到

$$\begin{aligned} f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}&\left[\frac{4\left(\pi^2n^2-8\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+16\pi n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^3\pi}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right. \\ &\left.-\frac{4\left(\pi^2n^2-8\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-16\pi n\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+32}{n^3\pi}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{54}$$

作为本题的结尾，我们指出很重要的一点认识。根据后续的傅里叶级数的收敛性理论，我们实际可以证明余弦级数(48)、正项级数(50)在$(0,\pi)$上均逐点收敛于$f(x)=x^2$，即

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}-\frac{4\left[1-(-1)^n\right]}{n^3\pi}\right)\sin nx,\ x\in(0,\pi). \end{aligned} \tag{55}$$

这可能会使得部分同学对于傅里叶级数的唯一性参数疑问：明明傅里叶系数是通过公式确定的，正弦级数和余弦级数两种傅里叶级数的系数为何不同？这是因为傅里叶级数实际要对周期2π的函数展开，所以整体地讨论傅里叶级数的也应该在长为2π的一个周期进行。由于式(55)只在半个周期$(0,\pi)$考虑了正项级数和余弦级数和函数，因此两个和函数“巧合”地收敛到同一个函数x^2。如果讨论式(55)正弦级数和余弦级数在$(-\pi,0)$的和函数，得到的和函数便是不同的。 □

1.3 傅里叶级数理论

本节我们介绍和傅里叶级数相关的两个重要理论：收敛性理论和系数理论。其中傅里叶级数的收敛性理论是至今现代数学都没有完全解决的问题，我们只介绍两个基本结论。傅里叶系数理论需要借助比较高的观点才便于理解，基本的部分是掌握帕塞瓦尔公式即可。

此外，在高等数学的范畴内，这两大理论的应用都是复杂数项级数的计算。例如我们早就知道数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是收敛的，借助傅里叶级数的理论可以证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$。

逐点收敛性理论

在高等数学的范畴里，我们只讨论傅里叶级数的逐点收敛。

考虑$f(x)$是2π周期函数，其傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right). \tag{56}$$

我们曾经说过，上述傅里叶级数虽然定义为$f(x)$的傅里叶级数，但是大多数情况下傅里叶级数都不收敛于$f(x)$，甚至傅里叶级数在一些点根本不收敛。我们必须对$f(x)$的光滑性提出要求，才能保证$f(x)$的傅里叶级数是逐点收敛的，并研究傅里叶级数的极限函数。

我们列出下面的收敛性结论：

定理 1. $f(x)$是2π周期函数，如果$f(x)$在一个周期$[-\pi,\pi]$满足下述两种结论之一：
1.狄利克雷条件 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$分段连续且分段单调。
2. $f(x)$在$[-\pi,\pi]$分段可导。
那么$f(x)$的傅里叶级数逐点收敛到和函数$S(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$（即左右极限的平均值）。

关于上述定理我们列出若干说明

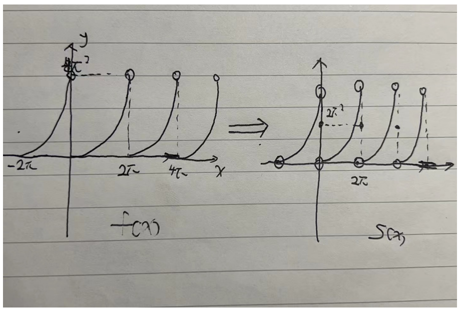

图 4: 例题5示意图。

- 分段连续（分段可导和分段单调同理）的定义，是被有限个第一类间断点分割后，函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$的各个小区间上连续。之所以提出分段的概念，是因为$f(x)$作为周期函数，很有可能在周期的衔接点形成间断点，例如例题1的函数就是如此。

- 傅里叶级数的和函数$S(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$并非$f(x)$，实际上如果$x_0$是$f(x)$的连续点，那么$f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$，此时$S(x_0)=f(x_0)$；如果如果$x_0$是$f(x)$的间断点，那么$S(x_0)$与$f(x_0)$常常不相等。

下面我们以例3的余弦级数作为例题讨论收敛性结论及其应用：

例 5. 求使得级数$x^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cos nx}{n^2}-\frac{4\pi\sin nx}{n}\right)$成立的$x$的取值范围并计算数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$的值。

分析：由傅里叶级数$\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cos nx}{n^2}-\frac{4\pi\sin nx}{n}\right)$得到数项级数值的方法是代入特殊的$x$。

Proof. 根据例题1的结论，考虑2π周期函数$f(x)$满足$f(x)=x^2$在$[0,2\pi)$成立，那么三角函数级数$\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cos nx}{n^2}-\frac{4\pi\sin nx}{n}\right)$是$f(x)$的傅里叶级数。注意到$f(x)$在一个周期$[0,2\pi)$是连续且单调的，符合狄利克雷条件，所以傅里叶级数$S(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cos nx}{n^2}-\frac{4\pi\sin nx}{n}\right)$逐点收敛，并且和函数$S(x)$在除了$2k\pi$以外的点都与$f(x)$相同，图形如图所示，即

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & ,x\neq 2k\pi,\, k\in\mathbb{Z}, \\ 2\pi^2 & ,x\neq 2k\pi,\, k\in\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{57}$$

由此等式$x^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cos nx}{n^2}-\frac{4\pi\sin nx}{n}\right)$在点$x\in(0,2\pi)$成立。

在傅里叶级数$S(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cos nx}{n^2}-\frac{4\pi\sin nx}{n}\right)$代入$x=0$得

$$S(0)=2\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \tag{58}$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$；代入$x=\pi$得

$$S(\pi)=\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}, \tag{59}$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$。 □

最后我们简单谈谈傅里叶级数收敛性的证明的演变历史。狄利克雷证明了分段连续且分段单调的函数具有收敛的傅里叶级数，人们致力于将狄利克雷条件放宽为连续函数，但是Reymond于1873年证明了，对于任意给定点，存在一个连续函数其傅里叶级数在该点发散。人们退而求其次，希望能够证明具有一定光滑性的函数的傅里叶级数几乎处处收敛（即在大多数点都收敛）。Kolmogorov在1926年构造了一个可积函数，其傅里叶级数在任意点都收敛，并预言对于$\forall p>1$，如果$\int_{-\pi}^{\pi}|f|^p\mathrm{d}x<\infty$，那么其傅里叶级数一定几乎处处收敛。这个猜想的证明非常困难，1965年Carleson采取复杂的创新方法证明了$p=2$的情况，1967年Hunt推广Carleson的方法证明了$p>1$的情况，最终Carleson因此获得了阿贝尔奖。对于一般的连续函数，傅里叶级数是否几乎处处收敛，是至今没有解决的问题。

傅里叶系数的性质

考虑$f(x)$是2π周期函数，其傅里叶系数a_0,a_n,b_n具有深刻的含义，其最直观的体现就是帕塞瓦尔公式：

定理 2. $f(x)$是2π周期函数，如果$f(x)$在一个周期$[-\pi,\pi]$有界可积，那么傅里叶系数满足

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{60}$$

上述傅里叶系数的性质可以用于计算复杂的数项级数

例 6. 利用例题5的结论计算数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$。

分析：计算复杂数项级数的方法，除了代入特殊的x，帕塞瓦尔公式也是很重要的思路。特别需要注意，傅里叶级数的常数项是$\frac{a_0}{2}$，而帕塞瓦尔公式需要代入的是a_0。

Proof. 我们对例题5的函数使用帕塞瓦尔公式，注意我们可以在周期$[0,2\pi]$用帕塞瓦尔公式

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^4\mathrm{d}x=\frac{32\pi^4}{9}+16\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right)+16\pi^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right). \tag{61}$$

利用$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{16}\left(\frac{32\pi^4}{5}-\frac{32\pi^4}{9}\right)-\pi^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^4}{90}. \tag{62}$$

$\square$

2 扩展延伸

2.1 扩展题概览

扩展延伸题部分难度较大，建议根据题目内容选择性阅读。

- 扩展习题1：中等难度，傅里叶系数的分析，经典技巧。
- 扩展习题2：中等难度，傅里叶系数相关的计算题，计算量较大。
- 扩展习题3：中等难度，帕塞瓦尔公式的应用。

2.2 扩展习题

题 1. $f(x)$是以2π为周期的三次可导函数，设$f(x)$的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

证明傅里叶级数一致收敛。

分析：证明级数一致收敛最重要的方法是强级数判别法，自然依赖对傅里叶系数a_n和b_n的估计。估计的技巧是非常经典的分部积分法。

Proof. 根据傅里叶系数公式有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x. \tag{63}$$

由于f可导，利用分部积分法

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n^2\pi}f'(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nx\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{64}$$

注意到f是可导的周期函数，自然导函数f'也是周期函数，即$f'(0)=f'(2\pi)$，因此

$$a_n=-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nx\mathrm{d}x. \tag{65}$$

注意到f''可导。所以f''在$[-\pi,\pi]$是有界连续函数，设$M=\max_{x\in[-\pi,\pi]}|f''(x)|$，那么

$$|a_n|=\left|\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nx\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)\cos nx|\mathrm{d}x\le\frac{2\pi M}{n^2\pi}=\frac{2M}{n^2}. \tag{66}$$

同理使用两次分部积分得到

$$b_n=-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\mathrm{d}x. \tag{67}$$

所以

$$|b_n|\le\frac{2M}{n^2}. \tag{68}$$

因此对傅里叶级数的每一项进行估计

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\le|a_n|+|b_n|\le\frac{4M}{n^2}. \tag{69}$$

用强级数判别法可以得到傅里叶级数一致收敛。 □

题 2. $f(x)$是以2π为周期的连续函数，其傅里叶系数为a_0,a_n,b_n，定义

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t,$$

求$F(x)$的傅里叶级数。

分析：$F(x)$的傅里叶系数可以写出累次积分的形式，反复利用积分换序可以用$f(x)$的傅里叶系数表示$F(x)$的傅里叶系数。此外我们反复利用了周期函数的积分性质，如果f具有2π周期，那么$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi+a}^{\pi+a}f(x)\mathrm{d}x$，其中$a$是任意实数。

Proof. 我们假定$F(x)$的傅里叶系数为A_0,A_n,B_n，我们首先证明$F(x)$是偶函数

$$F(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(t-x)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(s+x)f(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)f(x+s)\mathrm{d}s=F(x), \tag{70}$$

这里第二个等号使用了换元$s=t-x$，第三个等号则利用了被积函数$g(s)=f(s+x)f(s)$作为两个周期函数乘积，而具有2π周期的性质。由此傅里叶系数$B_n=0$。

接着计算A_0。套用傅里叶系数公式并更换积分顺序

$$\begin{aligned}A_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{71}$$

对于固定t，由于f是周期函数

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\mathrm{d}x=\int_{-\pi-t}^{\pi-t}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\pi a_0, \tag{72}$$

因此

$$A_0 = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} \pi a_0 f(t)\mathrm{d}t = a_0^2. \tag{73}$$

最后计算A_n。套用傅里叶系数公式并更换积分顺序

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{74}$$

考虑到积分中考虑f在t和$x+t$的取值，我们对$\cos nx$用差角公式

$$\cos nx = \cos n(x+t)\cos nt + \sin n(x+t)\sin nt. \tag{75}$$

由此

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\cos n(x+t)\cos nt + \sin n(x+t)\sin nt\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos n(x+t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin n(x+t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{76}$$

对于给定t，内层的积分可以计算

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos n(x+t)\mathrm{d}x = \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \pi a_n. \tag{77}$$

同理

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin n(x+t)\mathrm{d}x = \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \pi b_n. \tag{78}$$

由此

$$A_0 = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} \pi a_n f(t)\cos nt\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} \pi b_n f(t)\sin nt\mathrm{d}t = a_n^2 + b_n^2. \tag{79}$$

由此写出$F(x)$的傅里叶级数

$$F(x) \sim \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\cos nx. \tag{80}$$

□

题 3. $f(x)$和$g(x)$都是以2π为周期的函数，且在$[-\pi,\pi]$上连续可积，其傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \quad g(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx + d_n\sin nx).$$

求证：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nc_n + b_nd_n\right). \tag{81}$$

分析：利用帕塞瓦尔公式的组合研究傅里叶系数性质的标准思路。

Proof. 首先可以写出$f(x)$和$g(x)$的帕塞瓦尔公式

$$\begin{aligned}\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x, &(82)\\ \frac{c_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k^2+d_k^2\right) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)\mathrm{d}x. &(83)\end{aligned}$$

另一方面，根据傅里叶系数的定义，$f(x)+g(x)$的傅里叶系数等于f和g傅里叶系数的和，所以用$f(x)+g(x)$的帕塞瓦尔公式

$$\frac{(a_0+c_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left((a_k+c_k)^2+(b_k+d_k)^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x. \tag{84}$$

用(84)减去式(82)和式(83)就可以得到题目要求的结论。 □