二重积分

谢彦桐
北京大学数学科学学院

March 17, 2022

1 知识内容理解

1.1 二重积分的定义：与定积分对比

在本学期我们会接触很多不同类型的积分，他们形式上或许有诸多不同，但是却有着相同的定义模板：**先分后积取极限**。在引入二重积分的定义前，我们首先回顾定积分是如何定义的：定积分在有限闭区间$[a,b]$进行，我们首先**划分积分区间**：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_{n-1} < x_n = b. \tag{1}$$

然后**累积曲边梯形面积**，将以$[x_{i-1}, x_i]$为底的曲边梯形面积近似为$f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i)$，其中$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，然后求和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i). \tag{2}$$

定义区间划分的最大长为$\Delta = \max(x_i - x_{i-1})$，我们考虑划分的加细然后**取极限**：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i). \tag{3}$$

定积分的定义体现了“分”、“积”、“取极限”三个独立的步骤。

接下来我们考虑二重积分。直观来说，二重积分就是在二维平面$\mathbb{R}^2$的子集上进行的定积分运算。考虑有界闭区域D上的**划分积分区域**：

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n \tag{4}$$

定义$\lambda_i)$为D_i中直径，σ_i为有界子区域D_i的面积（注：面积的定义是比较复杂的超出了课本要求）。以D_i为底的三维”曲边柱体“的面积近似为$f(x_i, y_i)\sigma_i$，其中$(x_i, y_i) \in$

积分种类	定积分	二重积分
被积函数	一元函数	二元函数
积分微元	一个自变量$\mathrm{d}x$	两个自变量$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$或面积微元$\mathrm{d}\sigma$
积分区域	有界闭区间	有界闭区域
分割或分划	分为若干子区间	分为若干子区域
如何累积	累积曲边梯形面积	累积曲面柱体体积
如何取极限	子区间最大长度趋于0	子区域最大半径趋于0

D_i，然后**累积曲边柱体面积**

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\sigma_i \tag{5}$$

定义分割的最大半径为$\Delta = \max(\lambda_i)$,我们考虑划分的分割然后**取极限**，由此函数$f(x)$在闭区域D上的二重积分定义为

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\sigma_i. \tag{6}$$

二重积分的定义依然体现了“分”、“积”、“取极限”三个独立的步骤。

注解 1. 在本课程，区域的定义是连通的开集，是开区间概念的推广。部分文献不要求区域是开集，大家阅读时需要注意。

讨论二重积分，我们依然要考虑三个要素：积分区域D（它是一个有界闭区域），被积函数$f(x, y)$和积分元σ。由于积分元σ是在平面xoy上的小子区域，所以我们也将二重积分写作

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{7}$$

此时x, y被称为积分变量。关于定积分和二重积分概念的对比，我们总结在表格里。

与定积分情形类似，并非所有二元函数均可计算二重积分。但是二元函数的可积性讨论超出了课程的要求，我们只需要知道，有界的二元函数均可二重积分。

此外，二重积分的定义不适宜计算二重积分的值，计算二重积分有单独的方法，就好比我们计算定积分时使用Newton-Leibniz公式而非直接使用定义黎曼和。接下来的部分，我们都将讨论二重积分计算的方法。

1.2 二重积分的计算

二重积分计算的实质，是设法将二重积分转化为若干个定积分分别计算。“化繁为简”的主导思想不断贯穿在各个方法之中。

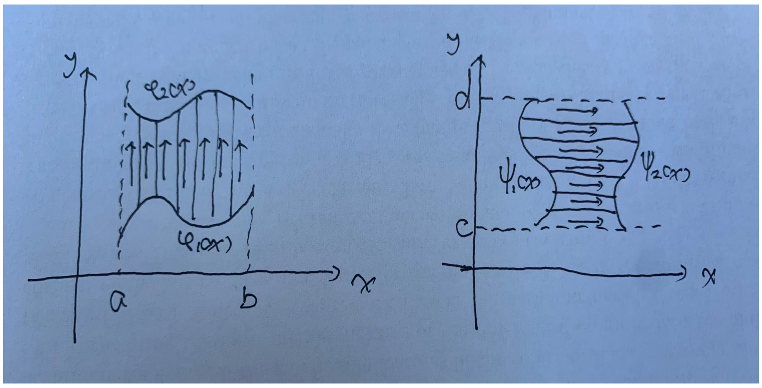

图 1: 图片展示了二重积分化累次积分的意义。为了算出整个区域的积分，我们将区域切成足够细的竖条/横条，每一个竖条/横条的积分可以看作y/x方向的定积分，然后再将这些竖条/横条通过x/y方向的定积分镶嵌在一起。左图：先y后x的积分顺序；右图：先x后y的积分顺序。

二重积分化累次积分

化累次积分是处理二重积分的最基本方法，方法的实质是选择“聪明”的方法分割区域：首先将积分区域按照x方向分割为若干条形区域，对于每一个条形区域我们再在y方向分割。由此，二重积分可以看成x方向各条区域上的定积分的累加。详见示意图。我们将上述分析写成下列公式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x. \tag{8}$$

式(8)右侧的“双层定积分”称为**累次积分**。方括号内部的定积分

$$I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y, \tag{9}$$

是以$[x, x+\mathrm{d}x]$为底的条形区域上的定积分，因此积分变量是y。然后我们对一系列$I(x)$再以x为积分变量做定积分。在一些教材中，可能会将式(8)右侧的累次积分写作

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \tag{10}$$

这一写法随简便，但是初学者易混淆，故不建议初学者使用。

计算累次积分的方法是先计算内层定积分$I(x)$，然后计算外层定积分$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x$。 内层积分$I(x)$是关于自变量y的定积分，计算时x是参数，对于不同的x，积分区间$[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$和被积函数$f(x,y)$都会变化。对于每一个$x$计算出$I(x)$后，我们再将$I(x)$作为一个函数，计算$I(x)$关于自变量$x$的定积分。

特别地，我们指出，也可以首先将积分区域D按y方向划分条形区域，然后累加各个条形区域上关于自变量x的定积分。得到的累次积分内层积分变量是x，外层积分变

量是y，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \tag{11}$$

式(8)和式(11)都可以讲二重积分化为累次积分，本质上一样的。**对于解题来说，我们需要根据被积函数和积分区域的特点选择计算量较小的转化累次积分的方式。**为了方便起见，我们将式(8)和式(11)中累次积分的积分顺序分别称为**先y后x**和**先x后y**。

最后我们给出二重积分化累次积分方法的一般顺序：

1.画出积分区域示意图：这一步骤可以有效防止后续步骤犯错。

2.选择合适的积分顺序：即选择式(8)还是式(11)中的累次积分。由于二重积分的积分顺序有两种，建议分别尝试并估计计算量，选择计算量较小的顺序。

3.写出形如式(8)或式(11)累次积分：这一步核心是计算内层积分的积分区间$[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]$。积分区间的计算有时会有难度，因此建议结合积分区域的示意图分析：对于给定的$x\in[a,b]$（以式(8)为例），计算此时y的**取值范围**就是内层积分的积分区间。

4.计算累次积分：先计算内层定积分$I(x)$，然后计算外层定积分$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x$。

下面的例题是通过累次积分计算二重积分最基本的例题。我们采用了两种不同的积分顺序，依照上述四个步骤完成计算。

例 1. 求$I=\iint_D(x^2+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是$y=x^2$与$y=\sqrt{x}$围成区域。

分析：本题是最基本的二重积分习题，请大家熟悉解题过程。

Proof. **1.**画出积分区域D的示意图。

2.选择积分顺序：我们这里尝试两种顺序。

3.1.以先y后x的顺序写出累次积分：结合示意图，自变量x的取值范围是$[0,1]$。对给定x，自变量y的取值范围是$x^2\le y\le\sqrt{x}$。由此写出累次积分

$$I=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+2y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x. \tag{12}$$

4.1.计算累次积分：内层积分为

$$I(x)=\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+2y)\mathrm{d}y=\left.(x^2y+y^2)\right|_{x^2}^{\sqrt{x}}=x^{\frac{5}{2}}+x-2x^4. \tag{13}$$

这里请注意，计算$I(x)$时积分自变量是y，而自变量x被看做常数。接下来

$$I=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+x-2x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{27}{70}. \tag{14}$$

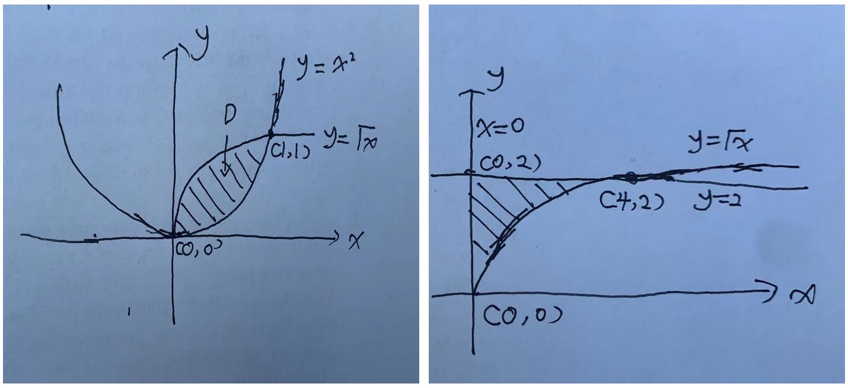

图 2: 左：例1示意图；右：例2示意图。

3.2.以先y后x的顺序写出累次积分：结合示意图，自变量y的取值范围是$[0,1]$。对给定y，自变量x的取值范围是$y^2 \leq x \leq \sqrt{y}$。由此写出累次积分

$$I = \int_0^1 \left[\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + 2y) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y. \tag{15}$$

4.2.计算累次积分：内层积分为

$$I(y) = \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + 2y) \mathrm{d}x = (\frac{x^3}{3} + 2yx)\Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} = \frac{-y^6 + 7y^{\frac{3}{2}}}{3} - 2y^3. \tag{16}$$

这里请注意，计算$I(y)$时积分自变量是y，而自变量x被看做常数。接下来

$$I = \int_0^1 \left(\frac{7}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} y^6 - 2y^3 \right) \mathrm{d}y = \frac{27}{70}. \tag{17}$$

□

我们指出，在计算例1中的积分的过程中，选择先x后y或是先y后x的积分顺序对计算造成的影响是有限的。在接下来的例题中，我们将看到选择积分顺序的重要性：用某种积分顺序可能无法计算。

例 2. 求$\iint_D \sin y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是$y = \sqrt{x}$，$y = 2$和$x = 0$围成区域。

分析：本题的积分，选择先x后y或是先y后x的积分顺序对计算是有影响的。我们应该学会通过被积函数$\sin y^3$的形式，去判断哪一种积分顺序可以算出累次积分。

Proof. **1.**画出积分区域D的示意图。

2.选择积分顺序：我们这里尝试两种顺序，在下一步中我们会写出两个累次积分的形式，然后可以得出必须先x后y的积分顺序。

3.两种积分顺序写出累次积分：先y后x时，x的取值范围是$[0,4]$，对给定的x，自变量y的取值范围是$\sqrt{x} \leq y \leq 2$。写出累次积分

$$I = \int_0^4 \left[\int_{\sqrt{x}}^2 \sin y^3 \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x. \tag{18}$$

先x后y时，y的取值范围是$[0,2]$，对给定的y，自变量x的取值范围是$0 \leq x \leq y^2$。写出累次积分

$$I = \int_0^2 \left[\int_0^{y^2} \sin y^3 \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y. \tag{19}$$

观察累次积分(18)和(19)，累次积分(18)是很难计算的。因为我们不知道函数$\sin y^3$对自变量y的原函数（注：原函数不是初等函数），由此无法使用牛顿莱布尼茨公式计算式(18)的内层积分$\int_{\sqrt{x}}^2 \sin y^3 \mathrm{d}y$。计算累次积分(19)则不会遇到困难，因为其内层积分$\int_0^{y^2} \sin y^3 \mathrm{d}x$的被积函数可以看作常值函数。由此我们选择先$x$后$y$的积分顺序。

对于熟练的同学，实际不需要写出两个累次积分的形式就可以判断积分顺序的优劣。只需要考虑$\sin y^3$对自变量y或x积分的优劣即可。$\sin y^3$对y积分会遇到求不出原函数的问题，对x积分则是简单的常值函数定积分。

4.计算累次积分：内层积分为

$$I(y) = \int_0^{y^2} \sin y^3 \mathrm{d}x = y^2 \sin y^3, \tag{20}$$

进一步

$$I = \int_0^2 y^2 \sin y^3 \mathrm{d}y = -\frac{1}{3}\cos y^3\bigg|_0^2 = \frac{1-\cos 8}{3}. \tag{21}$$

□

二重积分换元法

换元法是简化二重积分形式的重要方法，其思想与定积分换元法是一脉相承的。对于二重积分而言，当被积函数或是积分区域很复杂时，就可以考虑换元法。我们首先对比定积分加深对换元法的理解。

首先回顾定积分换元法：闭区间$[\alpha,\beta]$到闭区间$[a,b]$的映射$\varphi(t)$满足两个条件：
1.$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$，且当$t$从$\alpha$变化到$\beta$时，$\varphi(t)$始终在$[a,b]$。
2.$\varphi(t)$在$[a,b]$有连续导数。
那么有如下结论

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{22}$$

我们从两个角度来理解定积分的换元公式：

形式运算角度. 注意到微分关系

$$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t, \tag{23}$$

将(23)代入式(22)，将左侧$\mathrm{d}x$替换为$\varphi'(t)\mathrm{d}t$，再将自变量x替换为t，就得到式(22)右侧的式子。

内涵理解角度. 原本的定积分是以x尺度在$[a,b]$积分，即x是从a变化到b的。换元法的实质是将x从a到b变化的过程等效另一个参数t从α变化到β的过程，然后计算积分。由于x的变化速度和t的变化速度不同，就体现在微分关系(23)。

接下来我们介绍二重积分的换元公式：区域D'到D有一个映射

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta). \end{cases} \tag{24}$$

满足三个条件

1.是一个双射（也称一一映射），即既是单射也是满射。

2.函数$x(\xi,\eta)$和$y(\xi,\eta)$都具有连续的偏导数。

3.Jacobi行列式$J = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$**在**$(\xi,\eta) \in D'$**处处非0。**

那么有如下结论

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))|J|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{25}$$

单单看式(25)，我们依然可以从两个方向来理解：

形式运算角度. 我们知道Jacobi行列式是对导数的推广，是“多对多”的导函数，即

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{26}$$

将(26)代入式(25)，将左侧$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$替换为$\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$，再将自变量$x,y$替换为$\xi,\eta$，就得到式(25)右侧的式子。

内涵理解角度. 原本的二元积分是在xoy平面的区域D上运算的，我们将D切割小区域积分。通过将自变量x,y换元为ξ,η，我们等效地分割$\xi o\eta$平面的另一区域D'。由于自变量x,y和自变量ξ,η覆盖尺度的不同，就体现在微分关系(26)。

最后我们谈谈二重积分换元公式相较定积分的不同点：

1.二重积分对映射(24)要求为一一映射，而二重积分则则无此要求，这是二重积分复杂性所导致的。由此在进行二重积分换元运算时，我们不能如计算定积分时，简单地只去对应区间$[a,b]$的两个端点得到$[\alpha,\beta]$，而应该去谨慎思考整个区间D在映射(25)下对应哪个区间D'，区域D'是$(x.y) \in D$时(ξ,η)的所有取值。我们指出，对于一般的映射(25)，寻找区间D'是很难的，所以我们常用的换元都是具有直观意义的极坐标换元。

2.二重积分需要Jacobi行列式处处非0，定积分则无需$\varphi'(t) \neq 0$。
3.公式(25)右侧，微元$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$**和微元**$\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$**的比值是Jacobi行列式的绝对值**$|J|$**而不是行列式本身**。定积分微元比值$\varphi'(t)$则无需绝对值，这是两类积分最需要重点分辨之处。

注解 2. 公式(25)右侧之所以是*Jacobi*行列式绝对值$|J|$，是因为微元关系(26)中微元$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$和$\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$都表示面积，面积必须是正值；另一方面，定积分的微元关系(23)，$\mathrm{d}x$和$\mathrm{d}t$仅仅表示自变量的变化，这一变化可以是负的。

最后我们总结二重积分换元法的步骤，换元法的目标是简化二重积分，从一个二重积分得到一个新的更简单的二重积分：
1.写出换元之前的二重积分，画出其积分区域。
2.写出换元使用的映射（如式(24)）及其Jacobi行列式J。
3.根据映射(24)求换元后的新积分区域D'：这里D'代表$(x.y) \in D$时(ξ, η)的所有取值。对于复杂的换元计算D'很麻烦，但是对于有几何意义的简单换元这一步骤非常简单。
4.根据公式(25)写出新的二重积分。

极坐标变换法

极坐标变换是指在式(24)中考虑

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{27}$$

对于给定(x, y)，变量(r, θ)代表其极坐标。通过计算Jacobi满足行列式

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = r. \tag{28}$$

我们注意到极坐标默认$r \geq 0$，由此写出极坐标换元公式

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{29}$$

极坐标换元法有什么用呢？我们举一个例子：如图3，假如某二重积分$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$积分区域$D$是单位圆$x^2 + y^2 \leq 1$，那么在极坐标换元(27)的意义下新的积分区域$D'$是矩形$\{(r, \theta) : r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$，矩形上的积分是方便转化累次积分的。例如我们使用先积r后积θ的顺序相当于对于每一个给定的θ，我们在$r \in [0, 1]$积分，对于单位圆而言就是对于每一个方向θ我们先穷尽半径上的每一个点。就好比吃披萨饼，我们优先把披萨切成一系列扇形区域，然后在每一个方向吃掉披萨。

在应用极坐标换元法时，我们严格遵守一般换元法是四个步骤。只是在由D求D'的过程（步骤**3.**），我们只需通过D在极坐标下的特性就可以得出D'。下面我们给出适合

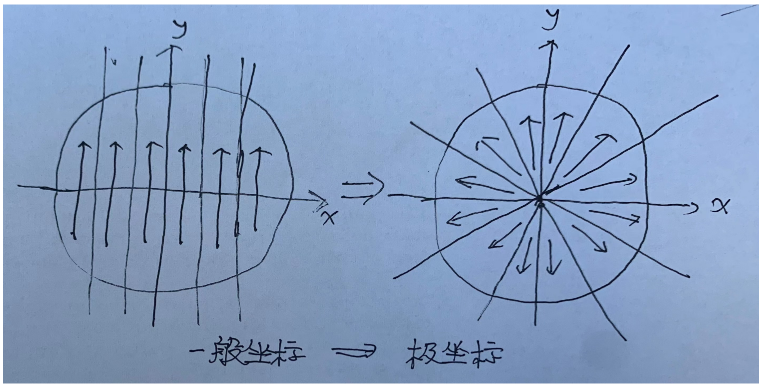

图 3: 极坐标换元的示意图，通过极坐标换元，我们可以将原本且竖条/横条的积分方式转为切扇形，在每一个给定方向θ对距离自变量r积分。

使用极坐标换元的两类积分：

1.当被积函数$f(x,y)$含有项x^2+y^2时，关系式$r^2=x^2+y^2$可简化被积函数。

2.当积分区域D为以原点为圆心的圆或扇形时，此时新区域D'在(r,θ)平面为矩形。

上述两个情况，前者化简被积函数，后者化简积分区域，都达到了化简二重积分的作用。但是上述两类不包含使用极坐标换元的所有情形。

例 3. 求$I=\iint_D(4-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是单位圆$x^2+y^2\leq 1$在第一象限的部分。

分析：本题从积分区域的形式和被积函数的形式上都方便使用极坐标换元法，属于这类问题的基本习题。

Proof. 本题积分区域为扇形，被积函数含x^2+y^2，使用极坐标换元非常方便。我们应牢记，换元的实质是将一个二重积分化为另一个二重积分。换元的步骤如下：

1.画图和写出原二重积分，此步略。

2.计算Jacobi行列式的值$J=r$。

3.求解新的积分区域，D'为矩形$[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$。

4.写出新的二重积分

$$I=\iint_{D'}r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{30}$$

接下来用先r后θ的顺序化累次积分，由于积分区域是矩形，对于给定的$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$都

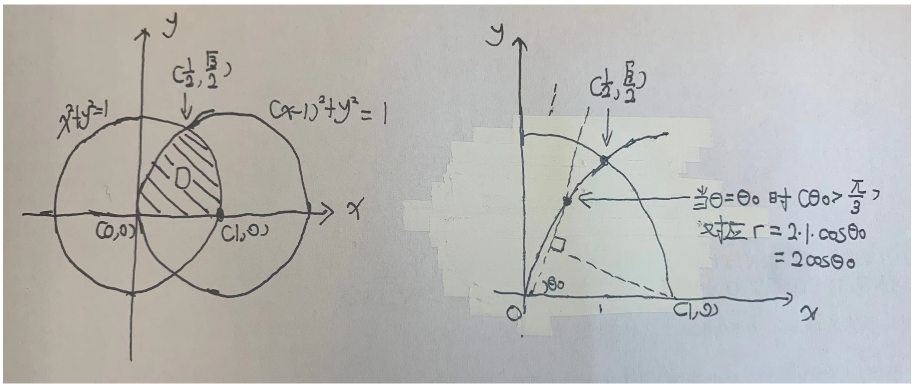

图 4: 例4示意图，其中右图给出了计算$\theta > \frac{\pi}{3}$时，通过垂径定理计算r的取值范围$[0, 2\cos\theta]$的方法。

有$r \in [0,1]$。我们省略具体步骤：

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{D'} r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sqrt{4-r^2}\Big|_0^1 \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\sqrt{3}) \mathrm{d}\theta = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\pi. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

□

注解 3. 根据经验，极坐标换元得到新的二重积分后，选择先r后θ的积分顺序比较方便计算。

对于一些比较复杂的题目，通过极坐标换元得到的新区域D'可能比较复杂，需要涉及分段讨论：

例 4. 求$I = \iint_D (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由两个圆$x^2+y^2=1$和$x^2-2x+y^2=0$相交部分在第一象限内的区域。

分析：本题被积函数含有x^2+y^2，使用极坐标换元法可以大大减小计算量，虽然换元得到新积分区域D'是不规则的，但是我们只需要从给定θ时r的取值范围的角度考虑D'即可。另一方面，本题如果不使用极坐标换元法，被积函数$\sqrt{x^2+y^2}$非常难处理！（因为形如$\sqrt{x^2+1}$的函数的不定积分是非常麻烦的）

Proof. 由于被积函数的形式，我们考虑使用极坐标换元，换元步骤如下：

1.画图和写出原二重积分，此步略。

2.计算Jacobi行列式的值$J=r$。

3.求解新的积分区域，D'是比较不规则的图形。然而考虑到我们后续要采用先r后θ的积分顺序，我们只要了解对于给定θ时r的取值范围即可。这一点的计算是不困难的：当$\theta\in[0,\frac{\pi}{3}]$时，$r$的取值范围是$[0,1]$；当$\theta\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$时，$r$的取值范围是$[0,2\cos\theta]$。

4.写出新的二重积分

$$I=\iint_{D'}r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{32}$$

然后化成累次积分计算，特别地本积分在r,θ坐标下的积分区域是不规则图形，我们需要分段计算积分

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'}r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3}\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{9}+\frac{2}{9}\left(9\sin\theta+\sin(3\theta)\right)\bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi+16}{9}-\sqrt{3}. \end{aligned} \tag{33}$$

□

我们指出，例4作为较有难度的换元法题目，其难度体现在换元得到的(r,θ)平面区域D'是不规则的图形。然而我们并不需要了解其完整图形，只需要从(x,y)平面区域D上提取去对给定θ时r的取值范围，就足以用于后续累次积分计算。

1.3 其他专题

可分离变量的二重积分

我们讨论一类可以简化计算的二重积分。考虑矩形$[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$的二重积分，如果被积函数可以写成一个关于x的函数和一个关于y的函数的积，即形如

$$I=\iint_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{34}$$

我们称此类积分为**矩形上可分离变量的二重积分**。例如例题3中，极坐标变换后的二重积分$\iint_{D'}r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$就是矩形$[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$可分离变量的二重积分。

这类二重积分有直接的做法：

$$\begin{aligned}\iint_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{a_1}^{a_2} f(x)\cdot\left(\int_{b_1}^{b_2} g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_{a_1}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{b_1}^{b_2} g(y)\mathrm{d}y\right), \end{aligned} \tag{35}$$

其中第一个等号利用率二重积分化累次积分公式，第二个和第三个等号则反复利用了将常数提出定积分式的方法。

我们将公式(35)应用于例3的积分可以大大简化计算：

$$\iint_{D'} r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^1 r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}\theta\right) = (2-\sqrt{3})\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{36}$$

在面对有分离变量形式且积分区域为矩形的情形，可以应用公式(35)。

高斯积分

高斯积分是指如下的定积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}. \tag{37}$$

此外高斯积分与普通的定积分不同，高斯积分定义在无穷区间$(-\infty,+\infty)$而不是某个有限区间，这样的定积分称为无穷积分，关于无穷积分的详尽定义将在后续阐明。

我们知道函数e^{-x^2}的原函数不是简单函数，由此高斯积分I不能用牛顿莱布尼茨公式计算，虽然我们实际可以算出高斯积分的值，做法借助了二重积分方法：

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right) \\ &= \iint_{[0,\infty]\times[0,\infty]}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}, \end{aligned} \tag{38}$$

其中第一个等号改变了积分变量的名字，第二个等号是矩形上可分离变量的二重积分的计算公式(35)，第三个等号是极坐标换元法。因此根据对称性

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}. \tag{39}$$

我们指出，由于函数e^{-x^2}的原函数不是简单函数，所以我们不能求出某个给定区间$[a,b]$上的积分值$\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，但是我们恰巧可以求出函数$\mathrm{e}^{-x^2}$在实数集$\mathbb{R}$全体的积分值。我们来看下述例题：

例 5. 请问$\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$与$\frac{\pi}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}x\mathrm{d}x$的大小关系。

分析：本题形式上与高斯积分的计算非常类似，但是解题时必须仔细考虑高斯积分推导的每一个细节是否可以转移到本题。

Proof. 由于形式上与高斯积分的计算式近似，我们将公式(38)直接搬过来并逐一验证等号是否成立：

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \quad ? \quad & \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right) \\
? \quad & \int_{[0,1]\times[0,1]} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
? \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 re^{-r^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta \\
? \quad & \frac{\pi}{2}\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

其中第一个等号改变了积分变量的名字，第二个等号是矩形上可分离变量的二重积分的计算公式(35)，第四个等号则是定积分的计算。第三个等号看似是使用了换元，那么它是否正确呢？

答案是否定的！在利用极坐标代换改变被积函数区域过程里，可以将(x,y)坐标意义下的矩形区域$[0,\infty]\times[0,\infty]$化为$(r,\theta)$坐标意义下的矩形区域$[0,\infty]\times[0,2\pi]$，但是不可以将$(x,y)$坐标意义下的矩形区域$[0,1]\times[0,1]$却不能化为$(r,\theta)$坐标意义下的矩形区域。实际上$(r,\theta)$坐标意义下的矩形区域$[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$对应的是$(x,y)$坐标意义下第一象限的单位扇形，是矩形区域$[0,1]\times[0,1]$的子集，因此第二个位置应该填入$>$。

所以，答案是$(\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x)^2 > \frac{\pi}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}x\mathrm{d}x$。

□

在部分文献中，下述的积分都可以称为高斯积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}+c}, \tag{40}$$

其中$a>0$，b,c可以是任意实数。换言之，只要e的指数上是一个二次项系数为负数的二次多项式，那么这样的函数在$\mathbb{R}$全体的积分就是可以计算的。式(40)的证明是在一般的积分换元法的基础上推广，证明留给有兴趣的读者作练习。

2 经典习题

除了知识点部分讲解的标准题外，本章习题含包含下面的解题技巧：累次积分的计算（题1）、绝对值积分的计算的分部分法和对称法（题2题3）、一般变量换元法（题4题5）和用分离变量法做和定积分有关的证明题（题6）。

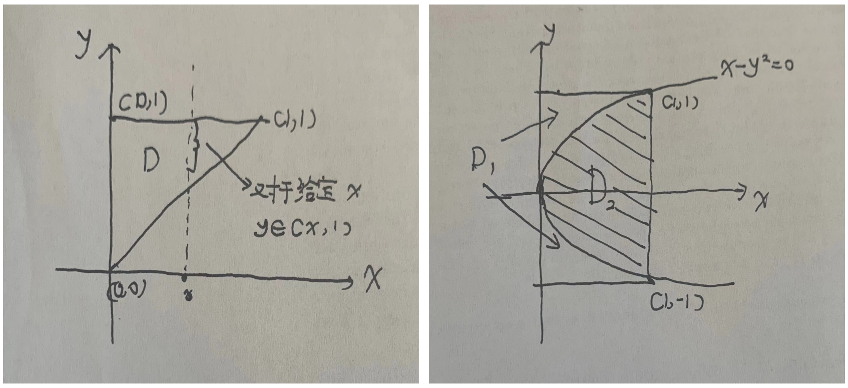

图 5: 左：题1示意图；右：题2示意图。

2.1 例题

题 1. 计算累次积分$I=\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$。

Proof. 本章计算累次积分的题目，一定不是让你直接计算定积分，而是希望你将累次积分首先写为二重积分，然后调换积分次序后重新计算累次积分。本题累次积分的内层积分是$\int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$。注意到函数$\frac{\sin y}{y}$的原函数并不好求（实际上原函数简单函数），所以不能使用牛顿莱布尼茨公式计算定积分$\int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$。

将累次积分化回重积分是此前训练的反过程。累次积分告诉我们，对于给定$0\leq x\leq\pi$，自变量y取值范围是$x\leq y\leq\pi$，依据这一特点可以画出积分区域D，是以$(0,0),(0,\pi),(\pi,\pi)$为顶点的等腰直角三角形。被积函数无需改变，仍是$\frac{\sin y}{y}$。于是我们从累次积分得到二重积分

$$I=\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\int_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{41}$$

接下来计算二重积分，我们选择先积x后积y的顺序，对给定$y\in[0,\pi]$，x的取值范围是$0\leq x\leq y$。由此将I写成累次积分计算

$$\begin{aligned} I &= \int_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\pi\left(\int_0^y \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\pi \sin y\mathrm{d}y=2. \end{aligned} \tag{42}$$

□

题 2. 求$I=\iint_D\left|x-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=[0,1]\times[-1,1]$。

分析：本题为绝对值二重积分计算，为一类比较综合的重积分计算题，标准方法是分区域计算，偶尔结合对称性。

Proof. 我们将积分区域D根据抛物线$x = y^2$分成两个区域，左侧为D_1（可以看作上下两个部分连接在一起），右侧为D_2，我们分别在两个区域计算定积分，即分别计算

$$I_1 = \iint_{D_1} \left|x - y^2\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} \left(y^2 - x\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{43}$$

和

$$I_2 = \iint_{D_2} \left|x - y^2\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_2} \left(x - y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{44}$$

我们选择先x后y的普遍积分顺序。对于给定$x \in [0,1]$，y在D_2中取值范围是$[-\sqrt{x}, \sqrt{x}]$。另一方面y在D_1取值范围则包括两段$[-1, -\sqrt{x}] \cup [\sqrt{x}, 1]$，这看似会导致麻烦，但是我们注意到对于关于$x$轴对称的点$(a, b)$和$(a, -b)$，他们关于$I_1$的被积函数$y^2 - x$的取值是一样的，因此$D_1$上下两部分积分是完全对称的，积分值也因而相等，所以只需要计算一部分积分就可以。

由此我们分别计算两个二重积分：

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} \left(y^2 - x\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \left(y^2 - x\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{5}. \end{aligned} \tag{45}$$

以及

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_2} \left(x - y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \left(x - y^2\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x = \frac{8}{15}. \end{aligned} \tag{46}$$

最终

$$I = I_1 + I_2 = \frac{11}{15}. \tag{47}$$

□

题 3. 求$I = \iint_D |3x + 4y| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是平面上的单位圆。

分析：本题为2020年春季高数统考期末考试题，为典型的绝对值二重积分计算，我们需要根据$3x+4y$的符号分两个区域计算二重积分。另外也可以结合对称性，因为被积区域单位圆关于直线$3x + 4y = 0$轴对称，而被积函数$|3x + 4y|$在关于直线$3x + 4y = 0$轴对称的点的函数值也是相等的，也就是说我们只需计算单位圆在直线$3x + 4y = 0$一侧的二重积分值然后乘以二即可。但是部分同学看到绝对值积分想到对称方法，会想当然的认为被积函数在四个象限是分别对称的，然后只计算一个象限的积分值乘以四，这是标准的错误做法。

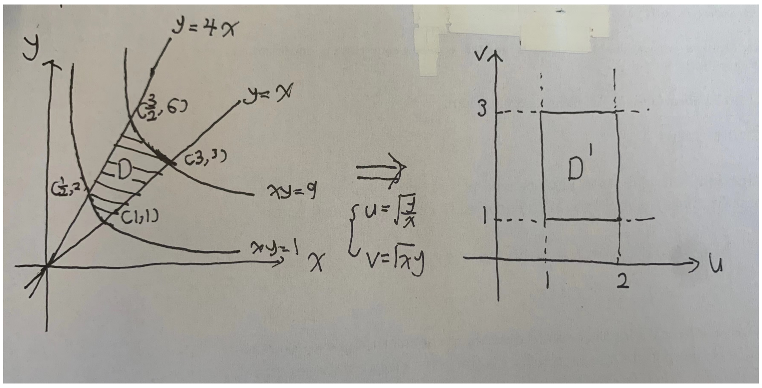

图 6: 题4示意图。

Proof. 我们计算单位圆在直线$3x+4y=0$上侧区域D_1的重积分，根据对称性将D_1上积分乘以2就得到D上的积分值。用极坐标换元法计算。由于D_1是一个半圆，极坐标变换下的区域D_1'是(r,θ)平面的矩形$[0,1]\times[-\arctan\frac{3}{4},\pi-\arctan\frac{3}{4}]$，由此计算：

$$\begin{aligned}
\iint_D |3x+4y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\iint_{D_1}(3x+4y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\iint_{[0,1]\times[-\arctan\frac{3}{4},\pi-\arctan\frac{3}{4}]} r^2(3\cos\theta+4\sin\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2\left(\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\right)\left[\int_{-\arctan\frac{3}{4}}^{\pi-\arctan\frac{3}{4}}(3\cos\theta+4\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \frac{2}{3}\left[3\sin\theta-4\cos\theta\Big|_{-\arctan\frac{3}{4}}^{\pi-\arctan\frac{3}{4}}\right] \\
&= \frac{20}{3}, \qquad (48)
\end{aligned}$$

其中第一个等号用对称性，第二个等号是极坐标换元法，第三个等号用可分离变量的二重积分计算方式(35)。 □

题 4. 求$I=\iint_D\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由四条曲线$xy=1$，$xy=9$，$y=x$和$y=4x$在第一象限围成的区域。

分析：本题的特点是积分区域特别复杂，是一个曲边四边形。为此我们考虑换元的方法，结合被积函数的性质使用换元$u=\sqrt{\frac{y}{x}}$和$v=\sqrt{xy}$。

Proof. 我们用换元 我们考虑如下的换元

$$\begin{cases} u=\sqrt{\frac{y}{x}}, \\ v=\sqrt{xy}, \end{cases} \qquad (49)$$

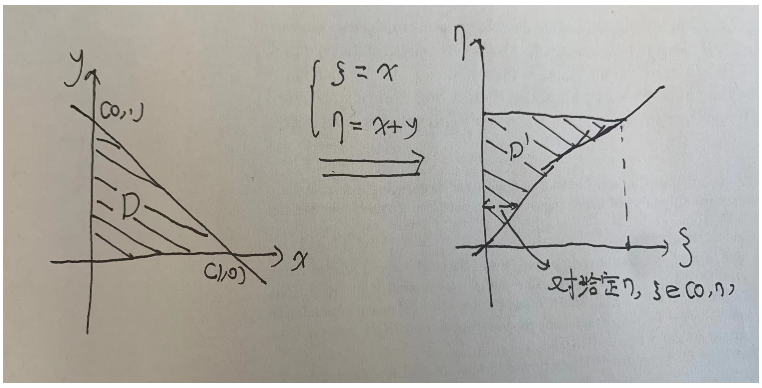

图 7: 题5示意图。

我们需要反解出(x,y)关于(u,v)的表达式

$$\begin{cases} x = \frac{v}{u}, \\ y = uv. \end{cases} \tag{50}$$

然后求解Jacobi行列式的值

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ v & u \end{vmatrix} = -\frac{2v}{u}. \tag{51}$$

这里我们可以看出，之所以在换元时候没有选择$u = \frac{y}{x}$和$v = \sqrt{xy}$，是为了在写出(x,y)关于u,v的表达式时简便，分别Jacobi行列式计算。

接下来求(u,v)平面上新积分区域D'，根据积分区域边缘四条曲线的特征，我们很容易断定D'是矩形$[1,2]\times[1,3]$。由此写出新的二重积分

$$I = \int_{D'} (u+v)\frac{2v}{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{52}$$

由于是矩形上的积分，后续的计算并不困难：

$$\begin{aligned} I &= \int_{D'} \left(2 + \frac{2v^2}{u}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_{D'} 2v\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_{D'} \frac{2v^2}{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= 8 + \left(\int_1^2 \frac{1}{u}\mathrm{d}u\right)\left(\int_1^3 2v^2\mathrm{d}v\right) = 8 + \frac{52}{3}\ln 2. \end{aligned} \tag{53}$$

□

题 5. 求$I = \iint_D \mathrm{e}^{\frac{x}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是$y = 1-x$，$y=0$和$x=0$围成区域。

分析：本题虽然积分区域很简单，但是被积函数却很复杂，因为直接用累次积分，被积函数$\mathrm{e}^{\frac{x}{x+y}}$以自变量$x$和$y$做积分都算不出来，因为$\mathrm{e}^{\frac{x}{x+y}}$的原函数总不是简单函数。因此我们选择使用一般的换元法，以化简被积函数为第一目的。

Proof. 为了化简被积函数，我们考虑如下的换元

$$\begin{cases} x = \xi, \\ x + y = \eta, \end{cases} \tag{54}$$

我们需要反解出(x, y)关于(ξ, η)的表达式

$$\begin{cases} x = \xi, \\ y = \eta - \xi. \end{cases} \tag{55}$$

然后求解Jacobi行列式的值

$$J = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = -1. \tag{56}$$

接下来还要求出(x, y)平面上的区域D对应的(ξ, η)平面区域D'，这一过程是比较难的。我们知道D是以$(0, 0), (1, 0), (0, 1)$三点为顶点的等腰直角三角形，对于D中的点，$\eta = x + y$的取值范围是$\eta \in [0, 1]$；对$\eta = x + y$给定，自变量$\xi = x$的取值范围相当于直线$x + y = \eta$与D相交得到的部分，因此$\xi = x$的取值范围是$\xi \in [0, \eta]$。由此，(ξ, η)平面上的区域D'是以点$(0, 0), (0, 1), (1, 1)$为顶点的等腰直角三角形。由此我们写出换元得的二重积分

$$I = \iint_{D'} \mathrm{e}^{\frac{\xi}{\eta}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{57}$$

接下来我们计算新的二重积分，计算的关键依然是积分顺序的选择：由于被积函数$\mathrm{e}^{\frac{\xi}{\eta}}$对于$\xi$的原函数是可以计算的，对于$\eta$的被积函数则无法计算，我们用先$\xi$后$\eta$的几分熟悉怒。对于给定$\eta \in [0, 1]$，$\xi$的取值范围是$[0, \eta]$，所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} \mathrm{e}^{\frac{\xi}{\eta}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^\eta \mathrm{e}^{\frac{\xi}{\eta}} \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\eta \\ &= \int_0^1 \left(\eta \mathrm{e}^{\frac{\xi}{\eta}} \right) \Big|_{\xi=0}^{\xi=\eta} \mathrm{d}\eta = \int_0^1 \eta(\mathrm{e} - 1) \mathrm{d}\eta = \frac{\mathrm{e} - 1}{2}. \end{aligned} \tag{58}$$

□

题 6. 设$f(x)$是$[0, 1]$上正值连续函数，设$f(x)$在$[0, 1]$的最小值是m，最大值M，求证：

$$1 \leqslant \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \right) \left(\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x \right) \leqslant \frac{(m + M)^2}{4mM}. \tag{59}$$

分析：本题虽然是证明定积分不等式，但是要借助二重积分方法，即通过构造矩形上可分离变量的二重积分，将定积分合成成二重积分。

Proof. 我们首先通过模仿高斯积分方法(38)，通过分离变量积分性质(35)将两个定积分合成为二重积分：

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) &= \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\right)\\ &= \int_{[0,1]\times[0,1]}\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{60}$$

如果在上述运算中，改变第一个等式右端定积分自变量的名字有

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) = \int_{[0,1]\times[0,1]}\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{61}$$

两式相加得到

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) = \int_{[0,1]\times[0,1]}\frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{62}$$

根据平均值不等式有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)\geq 1, \tag{63}$$

因此

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) \geq \int_{[0,1]\times[0,1]} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1. \tag{64}$$

另一方面，考虑到

$$\frac{f(x)}{f(y)} \in [\frac{m}{M},\frac{M}{m}], \tag{65}$$

所以

$$\frac{f(x)}{f(y)} + \left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^{-1} \leq \frac{M}{m}+\frac{m}{M} = \frac{M^2+m^2}{mM}, \tag{66}$$

这一不等式是对勾函数$f(x)=x+x^{-1}$的性质。但是使用这一方法无法证明右侧的不等号，因为平均值不等式有$\frac{M^2+m^2}{mM}\geq\frac{(m+M)^2}{4mM}$。

为此，我们考虑其他的方法，在原题目的不等式使用平均值不等式

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{mM}}{f(x)}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\mathrm{d}x\\ &\leq \frac{1}{4}\left[\int_0^1\left(\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}+\frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\right)\mathrm{d}x\right]^2,\end{aligned} \tag{67}$$

其中第一个等式是在两个积分中分别乘以/除以系数$\sqrt{mM}$，第二个不等式使用了均值不等式$ab\leq\frac{1}{4}(a+b)^2$，这里a,b取两个积分式。

我们考虑式(67)最后的积分的被积函数。由于$f(x)\in[m,M]$，我们有

$$\frac{f(x)}{\sqrt{mM}} \in [\sqrt{\frac{m}{M}},\sqrt{\frac{M}{m}}], \tag{68}$$

利用对勾函数$f(x)=x+x^{-1}$的性质得到

$$\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}+\left(\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}\right)^{-1}\leq\sqrt{\frac{m}{M}}+\sqrt{\frac{M}{m}}. \tag{69}$$

代入式(67)

$$I\leq\frac{1}{4}\left[\int_0^1\left(\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}+\frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\right)\mathrm{d}x\right]^2\leq\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^2=\frac{(m+M)^2}{4mM}. \tag{70}$$

□

2.2 精选补充题

补 1. 计算定积分$\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x$。（提示：考虑二重积分$\iint_D x^y\mathrm{d}\sigma$，其中$D=[0,1]\times[0,1]$）

补 2. 求$I=\iint_D|xy-1|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是正方形$[0,1]\times[0,1]$。

补 3. 求$I=\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$ 是$y^2=2x$，$x+y=4$和$x+y=12$围成区域。

补 4. 设f是$[-1,1]$上的连续函数，求证：$\iint_{|x|+|y|\leq 1}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 f(z)\mathrm{d}z$。

补 5. ***Schwarz*不等式.** 设f和g是$[a,b]$上的可积函数，求证：$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$。（提示：在$D=[a,b]\times[a,b]$考虑二重积分$\iint_D(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2\mathrm{d}\sigma$）

补 6. 已知$f(x)$是$[0,1]$上单调递减的正连续函数，求证：$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$。（提示：在$D=[0,1]\times[0,1]$考虑二重积分$I=\iint_D f(x)f(y)y(f(x)-f(y))\mathrm{d}\sigma$并证明$I\geq 0$。）