北京大学高等数学B习题课讲义：不定积分

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后修改：2022.10

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。免费符号计算网页https://www.wolframalpha.com/拥有计算函数不定积分的功能，可以作为学习不定积分参考使用。

1 知识点整理

不定积分是求导的逆运算。不定积分一章的难点主要在于不定积分运算的各种技巧，本章重点介绍这些技巧以及他们的使用时机。

1.1 不定积分的定义

首先我们给出不定积分的定义

定义 1.1. 设函数$f(x)$的定义域是I，如果存在同样以I为定义域的函数，使得$F'(x)=f(x)$对一切$x\in I$成立，则称$F(x)$的$f(x)$的**原函数**，$f(x)$被称为**被积函数**，记为

$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

从$f(x)$计算原函数$F(x)$的过程被称为**不定积分**。

我们注意到，如果$F(x)$是$f(x)$的原函数，那么任意函数$F(x)+C$都是$f(x)$的原函数，其中C是常数，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x)+C\right)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=f(x). \tag{2}$$

实际上，我们可以证明$f(x)$的所有原函数都能写成$F(x)+C$的1形式：

定理 1.1. 如果$F_1(x)$和$F_2(x)$都是$f(x)$的原函数，那么存在常数C使得$F_2(x)-F_1(x)$恒等于C。

上述定理的证明等价于说明0函数的原函数只能是常值函数，这个看似简单的结论用我们已经学的知识尚不能完成。我们后续学习微分中值定理以后可以证明这一结论。

上述分析实际解释了为什么不定积分运算需要写成$+C$（即加一个常数）的形式。因为给定一个$f(x)$，其原函数不唯一，而$f(x)$的所有原函数就是在其某一个原函数$F(x)$基础上加任意一个常数$C \in \mathbb{R}$构成的函数族。

补充内容：原函数的存在性和达布定理

是不是每一个函数$f(x)$都存在原函数呢？在定积分的篇章里我们可以证明，连续函数是存在原函数的。甚至一些不连续的函数也可能存在原函数。但是这并不意味着任何函数都存在原函数，事实上数学课达布曾给出这样的结论：

定理 1.2 (达布定理). 设$f(x)$在区间(a,b)上定义且存在原函数$F(x)$，那么$f(x)$在(a,b)上具有介值性，即对于任意p,q满足$a<p<q<b$，如果η是介于$f(a)$与$f(b)$之间的实数，那么存在$r \in (p,q)$满足$f(r)=\eta$。

达布定理定理的内容、证明和相关延伸都不需要掌握。达布定理给出了一个函数存在原函数的一个必要条件，那就是具有介值性。由于连续函数具有介值性的，因此一个存在原函数的函数也必须像连续函数一样具有价值线。

现在我们考虑什么样的不连续函数可能具有原函数呢？如果一个函数在定义域存在第一类间断点，该函数显然没有介值性，例如$[-0.5,0.5]$上的函数$f(x)=[x]$以$x=0$为跳跃间断点，从图像可以看出$f(x)$不具有介值性，因为找不到一个x使得$f(x)$取值0.5，所以它必然是不存在原函数的。但是当一个函数存在第二类间断点时，该函数可能具有原函数，这里举一例：在导数一节我们曾讨论过病态函数

$$f_2(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases} \tag{3}$$

其导函数

$$f_2'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases} \tag{4}$$

显然导函数$f_2'(x)$在$x=0$是第二类间断点，但是$f_2'(x)$在$\mathbb{R}$上存在原函数$f_2(x)$。

一般来说，我们不会关心间断函数特别是病态函数的不定积分，我们特别关心连续函数在的不定积分。

1.2 不定积分计算技巧

所谓计算一个函数的不定积分，是指写出该函数原函数的具体表达式。考虑到不定积分是求导的逆运算，我们可以根据一些简单的导函数的形式推出一些基本不定积分的

形式：

$$\begin{aligned}
\int 1\mathrm{d}x &= x+C, &(5)\\
\int x^a\mathrm{d}x &= \frac{x^{a+1}}{a+1}+C,\ (a\neq -1) &(6)\\
\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x &= \ln|x|+C, &(7)\\
\int \sin x\mathrm{d}x &= -\cos x+C, &(8)\\
\int \cos x\mathrm{d}x &= \sin x+C, &(9)\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \arcsin x+C=-\arccos x+C, &(10)\\
\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \arctan x+C, &(11)\\
\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x+C. &(12)
\end{aligned}$$

上述公式都是基本求导公式的反推，是必须牢记的基本公式。上述公式有两个需要注意的点：其一，函数$\frac{1}{x}$的不定积分原函数是$\ln|x|+C$而非$\ln(x)+C$，后者在$x<0$是无定义的，而我们一般要求函数本身需与原函数具有相同的定义域。作为延伸，一个非常容易记混的是函数$\frac{1}{-x}$的不定积分是$-\ln|x|+C$，而不是$\ln|-x|+C$。其二，函数$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的原函数既是$\arcsin x$也是$-\arccos x$，因为$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$，因此$\arcsin x$和$-\arccos x$只差一个常数$\frac{\pi}{2}$。这种看似形式但是表达相同原函数的情形在不定积分计算非常常见，另一个例子是$\ln|2x|=\ln 2+\ln|x|$，因此$\ln|2x|+C$和$\ln|x|+C$都是$\frac{1}{x}$的不定积分。

对于不定积分问题，只要将原函数的形式通过“观察”写出来就可以得分，过程不是必需的。但是大多数情况下，我们需要特定的变形，将原本的不定积分转化为上面的我们熟悉的不定积分来解答。这种变形可以是代数变形，也可以是换元法和分部积分等不定积分技巧。**将不会做的不定积分变形为会做的不定积分**，是不定积分问题的核心思路。

直接代数变形

将复杂的不定积分通过代数变形的方式化简为上述基本函数的不定积分，是最为简单的不定积分技巧。

例 1. 计算不定积分$\int\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$。

Proof. 由于被积函数满足

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right). \tag{13}$$

因此

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}\right) = \frac{\ln|x-1| - \ln|x+1|}{2} + C = \ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} + C. \tag{14}$$

□

例 2. 计算不定积分$\int \sin^3 x\mathrm{d}x$。

Proof. 用三倍角公式

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}. \tag{15}$$

因此

$$\int \sin^3 x\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int \sin x\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \sin 3x\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C. \tag{16}$$

□

凑微分法（第一类换元法）

我们先看例题

例 3. 计算不定积分$\int \tan x\mathrm{d}x$。

Proof. 计算

$$\int \tan x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C. \tag{17}$$

用换元$t = \cos x$得

$$\int \tan x\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C. \tag{18}$$

□

我们可见，凑微分法实质是基于微分运算

$$\mathrm{d}\cos x = -\sin x\mathrm{d}x. \tag{19}$$

由此我们从原来的被积函数$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$中提取了项$\sin x$，同微分$\mathrm{d}x$相乘凑出微分$\mathrm{d}\cos x$。当得到不定积分

$$-\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}, \tag{20}$$

其微分和被积函数两部分都只含$\cos x$，我们就可以将$\cos x$整体看成一个自变量计算不定积分。

凑微分法是不定积分技巧中最灵活却十分有效的，它需要解题人观察被积函数的形式提出一部分被积函数凑进微分，然后利用换元法处理关于一个“整体”自变量的不定积分。一些常见的凑微分方式包括三角函数$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$和$\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$，以及指数函数$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$。在三角函数型的不定积分里，凑微分法特别常用。

第二类换元法

相较第一类换元法，第二类换元法的思路要直接很多。我们来看下面的例题：

例 4. 计算不定积分$\int \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x$

Proof. 被积函数的形式$\frac{1}{x^2+2}$难以直接处理，我们必须将上述不定积分向$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$靠拢，因此考虑换元$x = \sqrt{2}y$得

$$\int \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{2}\mathrm{d}y}{2(y^2+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan y + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C. \tag{21}$$

□

第二类换元法的出发点与凑微分法完全不同。第二类换元法基于被积函数的特定形式，使得当我们对x进行特定换元后可以化简被积函数。上例中的被积函数$\frac{1}{x^2+2}$直接难处理，但是换元$x = \sqrt{2}y$后得到新被积函数$\frac{1}{\sqrt{2}(y^2+1)}$则是可以直接计算的不定积分，这体现出换元$x = \sqrt{2}y$的优势。不过相应的，由于换元$x = \sqrt{2}y$使得我们要将$\mathrm{d}x$代换为$\sqrt{2}\mathrm{d}y$，因此在选择换元方式时需要保证自己采用的换元不是过于复杂以至于产生难以处理的微分代换。

此外，利用三角换元化简根式积分是非常常用的换元法：

例 5. 计算不定积分$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$。

Proof. 采用换元$x = \sin t$。由于被积函数定义域$[-1, 1]$，我们取$t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，那么自然有$\cos t \geq 0$。换元计算不定积分

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int |\cos t|\mathrm{d}(\sin t) = \int \cos^2 t\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C. \tag{22}$$

由于不定积分$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$是关于$x$的函数，我们还要将$t$用$x$表示出来，那么

$$\frac{\sin 2t}{4} = \frac{\sin t\cos t}{2} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}. \tag{23}$$

因而

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} + C. \tag{24}$$

□

上例中的被积函数含有根式部分$\sqrt{1-x^2}$，进行换元$x=\sin t$后就将被积函数简化为$|\cos t|$，再进行三角函数分部积分。我们指出对不定积分$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$使用三角换元，我们一般采用正弦换元$x=\sin t$，由于$x\in[-1,1]$，我们必须指定$t$的定义域$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$取值，这样的好处是保证了$\cos t\geq 0$，在开根号时创造便利。

分部积分法

分部积分法是基于等式

$$\int f(x)\mathrm{d}(g(x))=f(x)g(x)-\int g(x)\mathrm{d}(f(x)). \tag{25}$$

一种等价形式是

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{26}$$

我们这里看一个例子

例 6. 计算不定积分$\int\arctan x\mathrm{d}x$。

Proof. 用分部积分

$$\begin{aligned}\int\arctan x\mathrm{d}x &= x\arctan x-\int x\mathrm{d}(\arctan x)\\ &= x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= x\arctan x-\frac{\ln(1+x^2)}{2}+C.\end{aligned} \tag{27}$$

□

分部积分法的思路也是很直接的，既然$\arctan x$的积分我们不会求，我们就通过分部积分法转而去求与$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$相关的一个积分，以达到简化被积函数的目的。换言之，上例使用的是分部积分公式(25)的特殊情况$g(x)=x$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\int x\mathrm{d}(f(x)). \tag{28}$$

但是这样残暴地把$f(x)$放进微分中的做法有时并不能真正地化简被积函数，因为我们不能保证$xf'(x)$的不定积分比$f(x)$更简单。因此很多时候，我们在使用分部积分时首先会凑一个微分得到形如$\int f(x)\mathrm{d}g(x)$的式子，其中$g(x)\neq x$，然后使用分部积分，请看下例：

例 7. 计算不定积分$\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$。

Proof. 用不定积分法计算

$$\int e^x \sin x dx = \int \sin x d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx. \tag{29}$$

再对不定积分$\int e^x \cos x dx$做分部积分

$$\int e^x \cos x dx = \int \cos x d(e^x) = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx. \tag{30}$$

综上可得

$$\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx, \tag{31}$$

于是

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C. \tag{32}$$

□

在本题中，如果直接使用形如(28)的分部积分，得到的新不定积分比原不定积分更复杂。但是我们将$\int e^x \sin x dx$通过凑微分的方式得到$\int \sin x d(e^x)$然后采用不定积分，得到的新不定积分$\int e^x \cos x dx$要简单得多。因此使用不定积分方法，适当采用凑微分技巧非常重要。

此外，我们注意到例5我们并不是直接化简得到$\int e^x \sin x dx$的值，而是通过两次不定积分得到了一个关于$\int e^x \sin x dx$的方程(31)。这种情形在不定积分技巧的使用中很常见。

本章后续的诸多例题都会使用不定积分的技巧。一般来说，见到形如$\arctan x$或是$\ln x$等项，我们最好通过形如式(28)的分部积分使得我们可以计算$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$或$(\ln x)' = \frac{1}{x}$相关的积分；若是见到$e^x$或$\sin x$这样便于凑微分的项，我们最好首先用形如上例的方式将他们凑入微分中再使用不定积分。

1.3 特殊函数不定积分技巧

对于积累特殊函数，包括有理分式、三角有理式和一部分根式，我们分别由特定的方法可以确保这类不定积分一定可以算出来。我们将介绍这类方法。这种具有“通用性”的方法一般思路明确，但是相应的计算量会比分部积分和换元法等“特殊”方法大很多。

有理分式积分法

有理分式积分法是被积函数为下述有理分式的不定积分：

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{33}$$

其中$P(x)$和$Q(x)$都是多项式。有理分式法是没有思维难度的定式方法，只要完成相应的操作你就一定可以计算出积分。

在介绍有理分式积分法前，我们不妨设$P(x)$的次数是小于$Q(x)$的，实际上如果$P(x)$次数大于等于$Q(x)$我们可以通过多项式带余除法的方法提出一部分项，例如

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}, \tag{34}$$

其中多项式项x可以积分，有理式项$\frac{x}{x^2+1}$是分子次数小于分母的有理式积分。

接下来我们通过例子为大家介绍有理分式积分法

例 8. ***2020高等数学B期中考试题.*** 用有理分式法计算不定积分$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x$

Proof. **第一步：检查有理分式的分子次数是否小于分母次数** 检查无误。

第二步：对分母进行因式分解 计算得

$$x^4-3x^3+3x^2-x = x(x-1)^3. \tag{35}$$

第三步：依据因式分解结果，将有理分式写成四类基本分式项的和 四类基本分式项是指

$$\begin{array}{c} \dfrac{A}{x-a}, \quad \dfrac{A}{(x-a)^n}(n>1) \\ \dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}(n>1), \end{array} \tag{36}$$

其中p,q是根据因式分解结果确定的，A,B,C则是待定常数。课本137页的关系式详细给出了什么样的因式分解结果可以拆解出什么样的基本分式项，我们这里不赘述。对于本例而言，我们可以得到

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}, \tag{37}$$

其中A,B,C,D为待定系数。

第四步：根据基本分式拆解结果计算待定系数 比较有效的计算方法有两种。其一是**通分法**。对式(37)右侧直接通分

$$\begin{aligned} & \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} \\ = \quad & \frac{A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx}{x^4-3x^3+3x^2-x} \\ = \quad & \frac{(A+B)x^3 + (-3A-2B+C)x^2 + (3A+B-C+D)x - A}{x^4-3x^3+3x^2-x}. \end{aligned} \tag{38}$$

然后逐项对应

$$\begin{aligned}A+B &= 1,\\ -3A-2B+C &= 0,\\ 3A+B-C+D &= 0,\\ -A &= 1.\end{aligned}$$

由此$A=-1,B=2,C=1,D=2$。

另一种确定系数的值的方法是**代数试法**，在(37)代入x特定值可以计算参数A,B,C,D，例如代入$x=2$建立方程

$$\frac{A}{2}+B+C+D=\frac{9}{2}. \tag{39}$$

但是这一方法计算量偏大，我们这里给出一种特殊的代数试法，我们称为**留数法**。在式(37)两侧同乘x得

$$\frac{x^3+1}{x^3-3x^2+3x-1}=A+\frac{Bx}{x-1}+\frac{Cx}{(x-1)^2}+\frac{Dx}{(x-1)^3}, \tag{40}$$

此时在式(40)左右代入$x=0$得

$$-1=A. \tag{41}$$

由此直接计算出A的值。类似在式(37)左右同乘$(x-1)^3$得

$$\frac{x^3+1}{x}=\frac{A(x-1)^3}{x}+B(x-1)^2+C(x-1)+D. \tag{42}$$

代入$x=1$得$D=2$。这一方法虽然可以有效计算A和D的值，但是并不能直接计算B和C的值。但是既然已经计算出A和D，再结合代数试法就容易计算出B和C，并降低了计算量。

综上我们得出了基本分式拆解

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}. \tag{43}$$

第五步：结合有理分式拆解(43)逐项计算不定积分显然

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x &= \int\left[-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right]\mathrm{d}x\\ &= -\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+C. \qquad (44)\end{aligned}$$

□

我们指出，考试遇到的有理分式积分的分母通常次数较低或者形式简单，使得计算量一般不会超过上面的例题。对于一般的有理分式的分母的形式$P(x)$，因式分解是比

较麻烦的的。如果不能因式分解，自然也无法将有理分式用式(36)中的基本分式表达出来。

此外，计算式(37)待定系数的方法中，通分法和代数试法虽然麻烦但是是一定可以算出来的。留数法虽然简单，但是其通常只能对分母为1次的基本分式使用。

三角有理式积分法

设$R(x,y)$是关于自变量x,y的二元有理式（即可以写成两个二元多项式比值的形式），如果被积函数可以写出如下三角有理式形式

$$f(x) = R(\sin x, \cos x). \tag{45}$$

那么我们一定可以通过万能公式换元$t=\tan\frac{x}{2}$，将三角有理式不定积分化为有理分式不定积分然后求解：

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t. \tag{46}$$

考虑到有理分式积分本身计算量就很大，万能公式代换的过程通常计算量也不小，我们一般不采用三角有理式积分法计算不定积分。例如我们对例题3不定积分$\int\tan x\mathrm{d}x$使用三角有理式不定积分法

$$\int\tan x\mathrm{d}x = \int\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int\frac{4t}{1-t^4}\mathrm{d}t. \tag{47}$$

再计算一个分母为四次的有理分式积分计算量是很大的，所以我们一般不采用有理分式积分法。对于三角函数型的不定积分，凑微分是更为简单有效的方法。有理分式积分法的主要价值是为计算机符号计算软件提供一种通用的不定积分算法。

根式型不定积分

可以计算的根式型不定积分种类很多，我们在此不一一枚举。这些不定积分的计算方法都是适当对根式采用第二类换元法，使得根式型不定积分转化为三角有理式积分。解决问题的关键是明白使用什么样的换元可以使得被积函数转化为有理分式，换元正确计算量一般不大，换元不正确则可能做不出来。我们通过下面的例题来理解什么样的换元可以处理根式型不定积分。

例 9. 用根式不定积分技巧计算不定积分$\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)(x-2)}}\mathrm{d}x$

Proof. 对被积函数变形

$$\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)(x-2)}}\mathrm{d}x = \int\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\mathrm{d}x. \tag{48}$$

做换元$t=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$得$x=\frac{2t^2-1}{t^2-1}$，于是$\frac{1}{x-1}=1-\frac{1}{t^2}$。由此

$$\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)(x-2)}}\mathrm{d}x=\int t\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2\cdot\frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2}\mathrm{d}t=\int\frac{-2}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{2}{t}+C. \quad (49)$$

进一步

$$\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)(x-2)}}\mathrm{d}x=2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C. \quad (50)$$

□

本题对被积函数做出的代数变形(48)很重要，然后使用换元$t=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$则大大化简积分。如果直接换元$t=\sqrt{(x-1)(x-2)}$是无法计算出本题积分的，其主要原因是将x写成t的表达式涉及反解一元二次方程组，是很繁杂的。而换元$t=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$，反解的表达式$x=\frac{2t^2-1}{t^2-1}$是关于t的有理分式，使得后续计算$\mathrm{d}x$与$\mathrm{d}t$的表达式非常方便。

一般来说，根式积分我们使用换元的形式通常为$t=\sqrt[n]{ax+b}$或$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，即根号下是一次多项式或一次有理分式，则保证了$x$关于$t$的表达式也不会太复杂，不至于对积分造成额外的麻烦。

1.4 几道综合题

不定积分是后续定积分、重积分等理论的基础，熟练掌握不定积分的各种技巧是需要一定数量的练习的。下面我们来看几道结合了多种方法的综合题。我们指出，我们给出的两道综合题计算技巧都并不常规，介绍这两道题的做法主要是为了增进同学们对各种不定积分方法的理解。后续的扩展补充题则收录了各种标准技巧在不定积分解题的使用方法。

例 10. 计算不定积分$\int\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$

分析：本题的积分结果在定积分里很常用，但是其计算方法却比较复杂，因此部分参考书会建议读者直接记下来这一不定积分结果。本题可以用三角换元做，令$x=\tan t$可以拆解根号$\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\cos t}$，然后化简会得到一个分母是四次的三角有理式非常麻烦。本题也可以用分部积分做，但是思路比较巧妙。

Proof. **方法1** 三角换元$x=\tan t$，其中$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$得

$$\int\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}. \quad (51)$$

根据典型的三角凑微分方法有

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos^4 t}=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{(1-\sin^2 x)^2}=\int\frac{\mathrm{d}y}{(1-y^2)^2}, \quad (52)$$

其中$y=\sin t$。对于上面的有理分式积分，我们将其分解为基本分式

$$\frac{1}{(1-y^2)^2}=\frac{A}{y+1}+\frac{B}{(y+1)^2}+\frac{C}{y-1}+\frac{D}{(y-1)^2}, \tag{53}$$

经过一番计算解得$A=B=D=\frac{1}{4}$，$C=-\frac{1}{4}$，进一步

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}y}{(1-y^2)^2} &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{(y+1)^2}-\frac{1}{y-1}+\frac{1}{(y-1)^2}\right)\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right|-\frac{y}{2(y-1)}+C.\end{aligned} \tag{54}$$

根据$y=\sin t$和$x=\tan t$，可以计算出$y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，由此

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right|-\frac{y}{2(y^2-1)}+C\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+C.\end{aligned} \tag{55}$$

利用对数性质也可以化简$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right|=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$。

方法2 直接做分部积分

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x &= x\sqrt{1+x^2}-\int x\mathrm{d}\left(\sqrt{1+x^2}\right)=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x-\int\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{56}$$

特别地，积分$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$是一道经典习题，见课本129页例题11，我们直接写出结果

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+C. \tag{57}$$

所以我们得到

$$\int\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\right)+C. \tag{58}$$

□

例 11. 计算两个不定积分$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$和$J=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}$

分析：本题被积函数是分母四次的有理分式，使用因式分解

$$x^4+1=\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\cdot\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right), \tag{59}$$

可以用有理分式积分法计算，但是计算量非常大。这一题可以采用“配对”的方法，通过计算不定积分$I+J$和$-I+J$。本题思路比较巧妙，供大家开拓思路参考。

Proof. 首先计算$I+J$得，考虑换元$y=x-\frac{1}{x}$，那么$\mathrm{d}y=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned}\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x &= \int\frac{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\mathrm{d}x}{\frac{1}{x^2}+x^2}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2+2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)+C. \end{aligned}\tag{60}$$

再计算$-I+J$，考虑换元$z=x+\frac{1}{x}$，那么$\mathrm{d}z=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x &= \int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{\frac{1}{x^2}+x^2}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}=\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\left(\frac{1}{z-\sqrt{2}}-\frac{1}{z+\sqrt{2}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}x+1}{x+\sqrt{2}x+1}\right|+C. \end{aligned}\tag{61}$$

由此可得

$$I=\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}x+1}{x+\sqrt{2}x+1}\right|+C.\tag{62}$$

以及

$$J=\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}x+1}{x+\sqrt{2}x+1}\right|+C.\tag{63}$$

□

2 扩展延伸

2.1 扩展题概览

- 代数变形技巧：扩展习题4，扩展补充题1，2和4。
- 凑微分技巧：扩展习题1-3，补充题3和7。
- 第二类换元法：扩展习题5和6，补充题8。
- 分部积分技巧：扩展习题7-9，补充题5和6。
- 配对、递推等其他技巧：扩展习题10和11。

2.2 扩展习题

题 1. 计算不定积分$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

分析：本题最难处理的部分是分母的$\sqrt{x^2-1}$，我们提供两种凑微分的处理方法。其一是标准的“倒数微分”技巧，另外一种则是旨在让复杂的$\sqrt{x^2-1}$进入微分。

Proof. **方法1** 注意到$\mathrm{d}\sqrt{x^2-1}=\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$，然后换元$t=\sqrt{x^2-1}$：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}\sqrt{x^2-1}=\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\arctan t+C, \tag{64}$$

由此

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\arctan\sqrt{x^2-1}+C. \tag{65}$$

方法2 我们的目标是凑出微分$\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$，首先考虑$x>0$的情况

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\arcsin\frac{1}{x}+C. \tag{66}$$

而当$x<0$时，我们从根号$\sqrt{x^2+1}$提取因子时，等式为$\sqrt{1-x^2}=-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$，因此

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=-\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\arcsin\frac{1}{x}+C. \tag{67}$$

根据x的符号总结

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C. \tag{68}$$

根据反三角函数的性质验证$-\arcsin\frac{1}{|x|}=\arctan\sqrt{x^2-1}$，因此两种方法结果相同。但是第二种方法涉及$x$符号的讨论，这是涉及的根式的不定积分的一个易错点。 □

题 2. 计算不定积分$\int \frac{\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x$

分析：本题是标准的三角函数型不定积分，很容易凑出微分$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$，据此进行积分。

Proof. 凑微分

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\left(4\sin^2 x+9\left(1-\sin^2 x\right)\right)^2}\mathrm{d}(\sin x)\\ &= \int \frac{t}{\left(9-5t^2\right)^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(9-5t^2\right)^2}\mathrm{d}(t^2)=\frac{1}{10\left(9-5t^2\right)}+C, \end{aligned}\tag{69}$$

其中换元$t=\sin x$，由此

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{10\left(9-5\sin^2 x\right)}+C=\frac{1}{10\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)}+C. \tag{70}$$

□

题 3. 计算不定积分$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$

分析：本题是含有ln的微分，为了化简被积函数，我们可以尝试凑出含ln的积分。此外还有一种使用第二类换元法的方法，计算量更大但是思路更直接。

Proof. **方法1** 为了处理$\ln\frac{1+x}{1-x}$项，我们注意到如下微分

$$\mathrm{d}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{2}{1-x^2}. \tag{71}$$

于是直接得

$$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C. \tag{72}$$

方法2 由于项$\ln\frac{1+x}{1-x}$不容易处理，我们做换元$t=\frac{1+x}{1-x}$，这要换元不仅化简了被积函数，而且x关于t的表达式$x=\frac{t-1}{t+1}$是分式，也不至于过分复杂。接着用第二类积分换元法

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1-\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2}\ln t\mathrm{d}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\\ &= \int \frac{(t+1)^2}{4t}\cdot\frac{2}{(1+t)^2}\ln t\mathrm{d}t=\int\frac{\ln t}{2t}\mathrm{d}t=\frac{(\ln t)^2}{4}+C.\end{aligned} \tag{73}$$

由此

$$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C. \tag{74}$$

本题体现了凑微分的第一类换元法相较于第二类换元法在计算量的优势，但是通常第一类换元法需要对被积函数更细致的观察。 □

题 4. 计算不定积分$\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$

分析：为了对三角函数式凑微分，有时可以采用恒等变形$1=\sin^2 x+\cos^2 x$。此外由于被积函数分子有项$\cos x-\sin x$，我们希望将这一项凑入微分中以化简被积函数。

Proof. 用恒等变形$1=\sin^2 x+\cos^2 x$得到

$$\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}=\frac{2(\cos x-\sin x)}{1+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}=\frac{2(\cos x-\sin x)}{1+(\sin x+\cos x)^2}. \tag{75}$$

由此进行凑微分

$$\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{2\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{1+(\sin x+\cos x)^2}=2\arctan(\sin x+\cos x)+C. \tag{76}$$

□

题 5. 计算不定积分$\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\mathrm{d}x$

分析：一般见到被积函数内涵根号下的平方项的，常常都使用三角换元处理，以去除被积函数的根号项。利用三角恒等式$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$结合第二类换元法，可以去除这一问题的根号，但是相应计算量也很大。本题还有一种特异方法。在部分教材中，会介绍使用双曲三角函数换元的技巧，我们这里不做涉及。

Proof. **方法1** 做三角换元$x=\sqrt{\frac{3}{2}}\tan t$，其中$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，由此$\sqrt{2x^2+3}=\frac{\sqrt{3}}{|\cos t|}=\frac{\sqrt{3}}{\cos t}$。由此对积分用第二类换元法

$$\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\mathrm{d}x=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\cos t}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\tan t}\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan t\right)=\sqrt{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t}. \tag{77}$$

针对三角积分$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t}$我们提出两种处理方法。

方法1.1 用凑微分的方法

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t} &= \int \frac{\sin t\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin^2 t}=-\int \frac{\mathrm{d}\cos t}{\cos^2 t(1-\cos^2 t)}\\ &= -\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2(1-y^2)}=-\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2}-\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2}\\ &= \frac{1}{y}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|+C,\end{aligned} \tag{78}$$

其中换元$y=\cos t$，由此$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right|+C$。

方法1.2用恒等变形$1=\sin^2 x+\cos^2 x$得到

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t}=\int \frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t\sin t}\mathrm{d}t=\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}+\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t. \tag{79}$$

一方面根据例题1得

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}=\int \frac{\sin t\mathrm{d}t}{1-\cos^2 t}=-\int \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{1-\cos^2 t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right|+C. \tag{80}$$

另一方面

$$\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=-\int \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{\cos^2 t}=\frac{1}{\cos t}+C. \tag{81}$$

由此也可得$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right|+C$。

接下来有

$$\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{\cos t} + \sqrt{3}\ln\left|\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}\right| + C. \tag{82}$$

由于$\tan t = \frac{\sqrt{6}}{3}x$，因此

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}x^2}} = \sqrt{\frac{3}{2x^2+3}}. \tag{83}$$

进一步

$$\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{2x^2+3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{3}}\right| + C. \tag{84}$$

方法2 换元$t = \sqrt{2x^2+3}$，那么$t^2 = 2x^2+3$，求微分得$2t\mathrm{d}t = 4x\mathrm{d}x$，移项$\mathrm{d}x = \frac{t\mathrm{d}t}{2x}$，代入积分中

$$\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{t}{x}\cdot\frac{t}{2x}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{t^2-3}\mathrm{d}t. \tag{85}$$

上述操作也可以理解为第二类换元法$t = \sqrt{2x^2+3}$。继续对t积分

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{t^2-3}\mathrm{d}t &= \int\left(1+\frac{3}{t^2-3}\right)\mathrm{d}t = t + \frac{\sqrt{3}}{2}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}t \\ &= t + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C.\end{aligned} \tag{86}$$

带回换元可得到式(84)结果。 □

题 6. 计算不定积分$\int\sqrt{7+x-x^2}\mathrm{d}x$

分析：我们可以变形$\sqrt{7+x-x^2} = \sqrt{\frac{29}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$，并尝试三角换元的方法求解。

Proof. 换元$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\sin t$，其中$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，用第二类换元法

$$\int\sqrt{7+x-x^2}\mathrm{d}x = \int\frac{\sqrt{29}}{2}|\cos t|\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\sin t\right) = \frac{29}{4}\int\cos^2 t\mathrm{d}t. \tag{87}$$

利用二倍角公式得

$$\int\cos^2 t\mathrm{d}t = \int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C. \tag{88}$$

我们注意到$t = \frac{2}{\sqrt{29}}\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)$以及

$$\begin{aligned}\sin 2t &= 2\sin t\cos t = 2\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\sqrt{7+x-x^2}\right) \\ &= \frac{8}{29}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{7+x-x^2}.\end{aligned} \tag{89}$$

由此

$$\int\sqrt{7+x-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{29}}{4}\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{7+x-x^2}+C. \tag{90}$$

□

题 7. 计算不定积分$\int \frac{x\arccos x}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x$

分析：观察这一问题，一方面由于被积函数有$\arccos x$，在分部积分法的指引下我们希望将$\arccos x$留在微分以外，将其余部分放进微分以内，然后用分部积分，另一方面，微分$\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)=\frac{2x\mathrm{d}x}{(1-x^2)^2}$，用凑微分的方法。

Proof. 用分部积分法

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arccos x}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \arccos x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\\ &= \frac{\arccos x}{2(1-x^2)}-\int\frac{\mathrm{d}x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\tag{91}$$

针对分式积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$用三角换元$x=\sin t$，其中$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{2\cos^3 t}=\int\frac{\mathrm{d}t}{2\cos^2 t}=\frac{\tan t}{2}+C.\tag{92}$$

由$x=\sin t$知$\tan t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$。由此

$$\int \frac{x\arccos x}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{\arccos x}{2(1-x^2)}-\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}+C.\tag{93}$$

□

题 8. 计算不定积分$\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

分析：为处理复杂项$\mathrm{e}^{\arctan x}$，我们凑微分$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\arctan x}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}$。

Proof. 计算

$$\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\arctan x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.\tag{94}$$

接着对积分$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$再做分部积分

$$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\frac{x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\arctan x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.\tag{95}$$

结合两次不定积分可得等式

$$\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{(1+x)\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.\tag{96}$$

于是

$$\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{(1+x)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.\tag{97}$$

□

题 9. 计算不定积分$\int \frac{x\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x$

分析：本题特别关注一类形如$I=\int xf(x)\mathrm{d}x$的不定积分，其中$f(x)$的不定积分是比较容易计算的，设$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$。如果$F(x)$不复杂，这类问题通常可以使用下述不定积分计算$\int xf(x)\mathrm{d}x=xF(x)-\int F(x)\mathrm{d}x$。

Proof. 在题3我们计算出

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{10\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)}+C. \tag{98}$$

这相当于微分关系

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{10\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)}\right)=\frac{\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x. \tag{99}$$

由此使用分部积分

$$\int \frac{x\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{10\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)}-\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}x}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}. \tag{100}$$

我们继续计算，利用微分$\mathrm{d}(\tan x)=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$有

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\left(4\tan^2 x+9\right)}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{4\tan^2 x+9}=\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2\tan x}{3}\right)+C.\end{aligned} \tag{101}$$

因此

$$\int \frac{x\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{10\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)}-\frac{\arctan\left(\frac{2\tan x}{3}\right)}{60}+C. \tag{102}$$

□

题 10. 用配对法计算两个不定积分$I=\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{a\cos x+b\sin x}$和$J=\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{a\cos x+b\sin x}$，其中参数$a,b>0$。

分析：本题是配对法的主要例子之一，是必须牢记的题型。单独计算不定积分I,J很难，于是我们选择计算不定积分$bI+aJ$和$aI-bJ$，并反解不定积分I,J。

Proof. 首先计算

$$bI+aJ=\int\frac{a\cos x+b\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x=x+C, \tag{103}$$

接下来

$$aI-bJ=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x=\ln|a\cos x+b\sin x|+C. \tag{104}$$

由此得

$$I=\frac{bx+a\ln|a\cos x+b\sin x|}{a^2+b^2}+C, \tag{105}$$

和

$$J=\frac{ax-b\ln|a\cos x+b\sin x|}{a^2+b^2}+C. \tag{106}$$

□

题 11. 用迭代法写出下列积分的递推式，其中$n,m\in\mathbb{N}$：
1.$I_n=\int\sin^n x\mathrm{d}x$
2.$J_{n,m}=\int x^n(\ln x)^m\mathrm{d}x$

分析：这类带一般参数n的不定积分，一般是通过分部积分的方法建立递推关系，而分部积分的思路与一般的分部积分大体一致。本题的**1**是将任意凑微分的单独一项$\sin x$凑入微分，本题的**2**则是保留导数好计算的$(\ln x)^m$在微分以外将余下部分凑微分。与之前的分部积分题目相同，分部积分的目的一直是转化被积函数为我们能处理的部分。

Proof. **1.**用分部积分

$$\begin{aligned}
I_n &= \int\sin^n x\mathrm{d}x=-\int\sin^{n-1}x\mathrm{d}(\cos x)\\
&= -\sin^{n-1}x\cos x+\int\cos x\mathrm{d}\left(\sin^{n-1}x\right)\\
&= -\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x\\
&= -\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x\\
&= -\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,
\end{aligned} \tag{107}$$

由此

$$nI_n=(n-1)I_{n-2}-\sin^{n-1}x\cos x. \tag{108}$$

2.用分部积分

$$\begin{aligned}
J_{n,m} &= \int x^n(\ln x)^m\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int(\ln x)^m\mathrm{d}\left(x^{n+1}\right)\\
&= \frac{x^{n+1}(\ln x)^m}{n+1}-\frac{m}{n+1}\int x^{n+1}\cdot\left(\frac{(\ln x)^{m-1}}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^{n+1}(\ln x)^m}{n+1}-\frac{m}{n+1}\int x^n(\ln x)^{m-1}\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^{n+1}(\ln x)^m}{n+1}-\frac{m}{n+1}J_{n,m-1}.
\end{aligned} \tag{109}$$

□

2.3 扩展补充题

补 1. 已知$f'(2+\cos x)=\tan^2 x+\sin^2 x$，求$f(x)$的表达式。

补 2. 计算不定积分$\int \frac{\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$。

补 3. 计算不定积分$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)^2}$。

补 4. 计算不定积分$\int \sqrt{1+\sin x}\mathrm{d}x$。

补 5. 计算不定积分$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$。

补 6. 计算不定积分$\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$。

补 7. 计算不定积分$\int \frac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$。

补 8. 计算不定积分$\int \sqrt{\tan x}\mathrm{d}x$。