三重积分

谢彦桐
北京大学数学科学学院

March 7, 2022

1 知识内容理解

三重积分在定义和计算技巧上与二重积分类似，但是计算量更复杂。如何通过积分的性质或是对称性减小三重积分的计算量，是三重积分计算问题的重要课题。

1.1 三重积分的定义

模仿定积分和二重积分，我们从“分”、“积”、“取极限”三个步骤理解三重积分的定义。

考虑三维空间中的区域Ω和三元函数$f(x,y,z)$，三重积分的定义步骤为

1.分 将Ω分为n个互不重叠的小区域Ω_i。

2.积 在每个小区域取点$(x_i,y_i,z_i)\in\Omega_i$，求和$\sum_i f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$，其中$\Delta V_i$是$\Omega_i$的体积。

3.取极限 不断加细小区域划分，即使得各个小区域的半径趋于0，和式的极限定义为三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to0}\sum_i f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i, \tag{1}$$

其中λ定义为所有小区域半径最大者的半径。

积分的三大要素是积分区域、被积函数和积分微元，三重积分的积分区域是三维空间的区域，被积函数是三元函数，积分微元是体积微元，写作$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$或$\mathrm{d}V$。

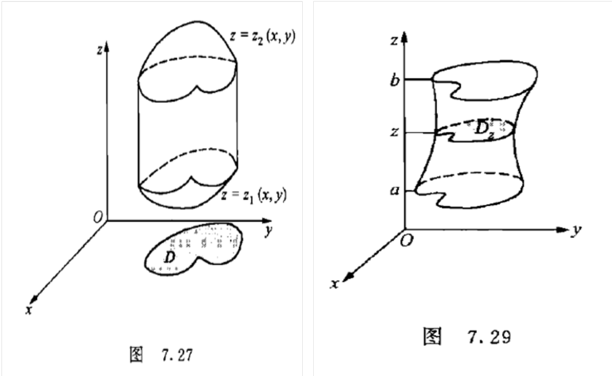

图 1: 三重积分化累次积分示意图。左：“先一后二”；右：“先二后一”。

1.2　直角坐标下三重积分的计算

三重积分化累次积分

三重积分化累次积分计算是三重积分最基本的计算方法，其核心是对三维区域Ω的拆分。由于三维空间的复杂性，我们将三重积分化累次积分的方法分为两类：

1.“先一后二” 如图1左图所示，固定自变量(x,y)时，z在Ω的取值范围是$z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$，而$(x,y)$本身的取值范围$D$则是$\Omega$在坐标平面$XoY$的投影。直观来看，我们将$\Omega$沿$z$方向分成很多“小条”，在每个“小条”上计算一个定积分，然后再将这些“小条”粘结成为整个区域Ω，相当于再计算一个截面D上的二重积分：

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2}$$

2.“先二后一” 如图1右图所示，固定自变量z时，(x,y)在Ω的取值范围是相当于区域Ω平行于坐标平面XoY的一个截面。直观来看，我们将Ω切成许多平行于坐标平面XoY的“薄面”，在每一个“薄面”计算一个二重积分，然后再将这些“薄面”粘结成为整个区域Ω，相当于再计算z方向的一个定积分：

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\left[\iint_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z. \tag{3}$$

也就是说，计算三重积分对应的累次积分，实际是分别计算一个定积分和二重积分，考虑到二重积分本身计算的复杂性，计算三重积分的过程通常也十分麻烦，因此设法减小计算量是必须的。

与二重积分类似，化累次积分的步骤可以分为四步：

1.画出积分区域示意图：三维空间的示意图是比较难画的，为此建议熟悉一些常见的图形，见附录。

2.选择合适的积分顺序：通常是选择“先一后二”或“先二后一”，同时需要选择固定那个自变量进行积分。选择是否正确可能决定了计算量，我们接下来会专门讨论。

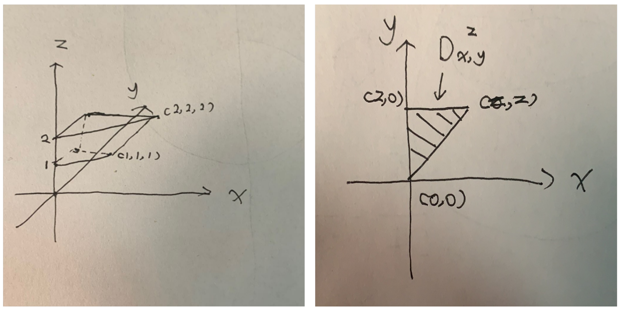

图 2: 左图：例1积分区域棱台Ω示意图。右图：对于给定z，(x,y)的取值范围$D^z_{(x,y)}$的示意图。

3.写出形如式(2)或式(3)累次积分：这一部分难点依然是积分上下限和积分区域的计算，通常要结合示意图进行。
4.计算累次积分，即计算一个定积分和一个我二重积分。

接下来我们就如何选择积分顺序，**通常我们会选择比较符合几何直观的积分顺序**，例如如果选择“先二后一”，固定(x,y)先对z积分比较舒服，如果选择“先一后二”的积分顺序，固定z先对(x,y)积分比较舒服。除此之外还有关于积分顺序的一些建议，然后通过下面三个例题来展示
1.首先是从积分区域的形状出发，我们希望固定自变量以后，剩余的自变量的取值范围是类似的，分段讨论会造成麻烦，见例题1。
2.其次要考虑的是被积函数对哪个自变量可以计算原函数，必须要保证内层积分是可以计算的，见例题2。
3.有一类特殊的被积函数，只与(x,y,z)中的一个自变量有关，这类三重积分通常选择“先一后二”的积分顺序，先计算与被积函数无关的两个自变量形成的二重积分，见例题3。

例 1. 求$I=\iiint_\Omega (y^2+z^2)^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是六个点$(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$和$(0,0,2),(0,2,2),(2,2,2)$围成的棱台。

分析：本题是最基本的三重积分问题，三重积分的难点在于积分顺序的选择。本题我们选择“先一后二”的顺序，固定z对x,y积分，这么做的原因是对于给定$z\in[1,2]$，棱台的截面即(x,y)的取值范围总是等腰直角三角形。如果选择别的积分熟悉怒，例如固定x对y,z积分，那么当$x\in[0,1)$时棱台的截面是梯形，当$x\in[1,2]$时棱台的截面是三角形，就必须涉及分段讨论。

Proof. **1.**画出积分区域示意图，如图2。

2.选择积分顺序“先一后二”，我们得到对于给定$z\in[1,2]$，自变量(x,y)取值图形$D^z_{(x,y)}$是以点$(0,0),(0,z),(z,z)$为三个顶点的等腰直角三角形。

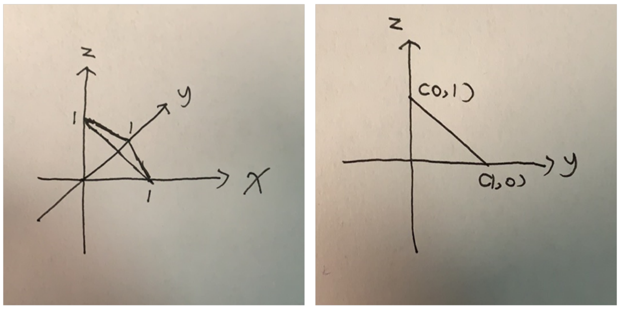

图 3: 左图：例2积分区域正三棱锥Ω示意图。右图：(y,z)的取值范围$D_{(y,z)}$的示意图。

3.写出累次积分。

$$I=\int_1^2\left(\iint_{D^z_{(x,y)}}(y^2+z^2)^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z. \tag{4}$$

4.计算累次积分。我们首先计算内层的二重积分，选择先x后y的积分顺序，对给定的$y\in[0,z]$，自变量x取值范围$[0,y]$，所以

$$\begin{aligned}\iint_{D^z_{(x,y)}}(y^2+z^2)^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^z\left(\int_0^y(y^2+z^2)^{-1}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^z y(y^2+z^2)^{-1}\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(y^2+z^2\right)\Big|_{y=0}^{y=z}=\frac{\ln 2}{2}.\end{aligned} \tag{5}$$

最后

$$I=\int_1^2\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\mathrm{d}z=\frac{\ln 2}{2}. \tag{6}$$

$\square$

例 2. 求$I=\iiint_\Omega(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是平面$x+y+z=1$和三个坐标平面相交在第一卦限形成的四面体。

分析：本题的被积函数非常复杂，如果不假思索选择积分顺序，可能面临被积函数原函数无法计算的困境。例如函数$(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}$对自变量$y,z$实际都不能计算原函数，所以内层积分必须对$x$进行。

Proof. 我们首先观察被积函数$(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}$，包含项$\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}$，由于e的指数项关于$y$和$z$都是二次多项式，我们此前学习高斯积分曾指出$\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}$对自变量$y$和$z$的原函数皆不可计算，所以最内层必须先积$x$。由此我们选择“先一后二”的积分顺序。

1.画出积分区域示意图，此处略去。

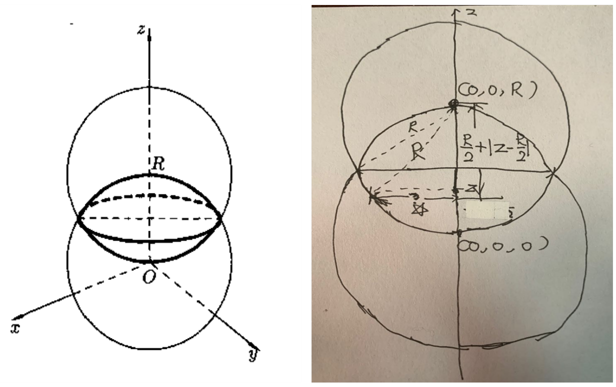

图 4: 左图：例3积分区域Ω示意图。右图：在坐标轴z方向积分区域Ω示意图。

2.选择积分顺序“先二后一”，对于给定(y,z)，自变量x的取值范围是$0 \le x \le 1-y-z$。(y,z)的取值范围是以$(0,0),(1,0),(0,1)$为顶点的等腰直角三角形$D_{(y,z)}$。

3.写出累次积分：

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{(y,z)}} \left(\int_0^{1-y-z} (1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint_{D_{(y,z)}} \left((1-y-z)(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{7}$$

4.计算累次积分：我们相当于计算上述的一个二重积分。被积函数$(1-y-z)(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}$看起来依然很复杂，二重积分的积分顺序看起来并不容易选择。通过尝试，我们发现被积函数对自变量z的原函数是可以计算的，所以选择先z后y的积分顺序：对于给定$y \in [0,1]$，自变量z的取值范围是$0 \le y \le 1-z$：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (1-y-z)(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (1-y) \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2} \Big|_{z=0}^{z=1-y} \right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)\left(1-\mathrm{e}^{-(1-y)^2}\right) \mathrm{d}y = -\frac{1}{4}\left((1-y)^2+\mathrm{e}^{-(1-y)^2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{4\mathrm{e}}. \end{aligned} \tag{8}$$

□

例 3. 求$I = \iiint_\Omega z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是两个球$x^2+y^2+z^2 \le R^2$与$x^2+y^2+z^2-2Rz \le 0$围成区域。

分析：本题的积分区域是很复杂的，因此选择积分顺序是方程重要的。本题的被积函数只含自变量z，所以我们选择“先二后一”的积分顺序，先计算(x,y)自变量的二重积分，后计算z方向积分。

Proof. 介绍本题过程中，我们首先使用最快做法：先计算(x,y)自变量的二重积分，后计算z方向积分。作为对比，我们介绍其他积分顺序带来的困难。

1.画出积分区域示意图，如图2。

2.选择积分顺序“先二后一”。对于给定的$z\in[0,R]$，(x,y)的取值范围$D^z_{(x,y)}$构成以原点为圆心，半径$R^z_{(x,y)}$可以分段计算

$$R^z_{(x,y)}=\begin{cases}\sqrt{R^2-(R-z)^2} & ,0\le z\le \frac{R}{2},\\ \sqrt{R^2-z^2} & ,\frac{R}{2}<z\le R.\end{cases} \tag{9}$$

其中半径的计算可以结合图3右侧的截面图。

3.写出累次积分。由于内层是关于(x,y)的积分，我们可以将被积函数z^2提到二重积分以外

$$I=\int_0^R\left(\int_{D^z_{(x,y)}}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\int_0^R z^2\left(\int_{D^z_{(x,y)}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z. \tag{10}$$

4.计算重积分。由于此时内层的二重积分相当于计算圆$D^z_{(x,y)}$的面积，根据z的取值分段：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R\left[\pi z^2\left(R^z_{(x,y)}\right)^2\right]\mathrm{d}z\\ &= \pi\left[\int_0^{\frac{R}{2}}z^2(2Rz-z^2)\mathrm{d}z+\int_{\frac{R}{2}}^R z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z\right]\\ &= \pi R^5\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{160}+\frac{7}{24}-\frac{31}{160}\right)=\frac{59R^5\pi}{480}. \end{aligned} \tag{11}$$

我们更换积分顺序重新计算本题，先积分z，再对(x,y)二重积分：我们得到对于给定(x,y)，z的取值范围是

$$R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}. \tag{12}$$

而(x,y)本身的取值范围是以原点为圆心，半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}R$的圆，该圆记作$D_{x,y}$。以这种顺序写出累次积分：

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{x,y}}\left(\int_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}z^2\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{3}\iint_{D_{x,y}}\left(z^3\Big|_{z=R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{13}$$

我们注意到剩下的关于(x,y)的二重积分的被积函数是异常复杂的，于是我们只能

寄希望于极坐标换元法的计算

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} r\left(\frac{z^3}{3}\Big|_{z=R-\sqrt{R^2-r^2}}^{z=\sqrt{R^2-r^2}}\right)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} r\left(\frac{z^3}{3}\Big|_{z=R-\sqrt{R^2-r^2}}^{z=\sqrt{R^2-r^2}}\right)\mathrm{d}r \quad \text{（分离变量）} \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} R^2\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{z^3}{3}\Big|_{z=R(1-\cos\gamma)}^{z=R\cos\gamma}\right)\mathrm{d}\gamma \quad \text{（定积分换元}r=R\sin\gamma\text{）} \\
&= \frac{2\pi R^5}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\gamma\cos\gamma\left[(\cos\gamma)^3-(1-\cos\gamma)^3\right]\mathrm{d}\gamma.
\end{aligned}
$$

上述三角定积分的计算我们一般采用凑微分的方法，考虑定积分换元$t=\cos\gamma$得

$$
\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\gamma\cos\gamma\left[(\cos\gamma)^3-(1-\cos\gamma)^3\right]\mathrm{d}\gamma = -\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(-2t^4+3t^3-3t^2+t\right)\mathrm{d}t = \frac{59}{320}. \tag{14}
$$

由此可以得到相同的结果。

虽然两种积分顺序都可以计算题目的三重积分，但是显然选择“先二后一”的第一种积分顺序计算更简便。究其原因，是三重积分的计算复杂度来源于累次积分中二重积分的计算复杂度，一种好的积分顺序可以使得累次积分中的二重积分计算部分简化。本题的第一种“先二后一”的积分顺序，利用了被积函数z^2只和自变量z有关的特点，由此内层对自变量(x,y)的二重积分实际是被积函数为常数的二重积分；第二种“先一后二”的积分顺序，外层对自变量(x,y)的二重积分需要面对内层定积分得到的复杂被积函数，添加了大量计算量。

这里做如下总结：如果某三重积分的被积函数只与三个自变量中的一个自变量有关（如本题被积函数为z^2仅与z有关），那么选择固定这个与被积函数有关的变量，在内层首先计算关于另外两个自变量的二重积分（如本题选择固定z先积分x,y）通常是最简单的。

□

对称性的应用

通过上一节的三道例题，我们介绍了三重积分化累次积分的基本计算方法和积分顺序选择技巧。可以见到，到积分区域或被积函数很麻烦时，化累次积分计算的方法是非常麻烦的。然而对于一些特殊的三重积分，如果被积函数和积分区域具有对称性，合理使用对称性的方法会大大降低计算量。但是直接使用对称性的题目通常过于简单，对称性的使用也需要技巧，看下面的例题：

例 4. 求$I=\iiint_\Omega(x+1)(y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$。

分析：椭球是具有很强对称性的区域，椭球不仅关于三个坐标平面对称，还关于原点中心对称。但是被积函数似乎不具有很强的对称性，这是我们需要着重处理的部分。

Proof. 我们将被积函数拆成四个部分$xy+x+y+1$计算，首先是

$$I_1 = \iiint_\Omega xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{15}$$

椭球Ω关于坐标平面XoZ是对称的，现在我们考虑关于坐标平面XoZ对称的两个点(x_0, y_0, z_0)和$(x_0, -y_0, z_0)$，被积函数xy在这两个点的取值是相反的，因此椭球关于坐标平面XoZ对称的两部分具有相反的积分值，所以积分$I_1 = 0$

同样利用关于坐标平面XoZ的对称性，我们可以证明$I_2 = \iiint_\Omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$。利用关于坐标平面$YoZ$的对称性，我们可以证明$I_3 = \iiint_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$，所以积分只剩下一部分

$$I = \iiint_\Omega (x+1)(y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{16}$$

这一部分虽然无法使用对称性，但是相当于计算椭球的体积。椭球的体积可以通过化累次积分计算（由于被积函数为1，使用“先一后二”的积分顺序）：

$$\iiint_\Omega 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\pi abc. \tag{17}$$

另一种考虑椭球体积的方法是通过拉伸变换。我们知道单位球面积是$\frac{4}{3}\pi$，而椭球Ω相当于在三个坐标轴x, y, z方向分别将单位球拉长a, b, c倍，由此椭球的体积变为$\frac{4}{3}\pi abc$。 □

例4这种**将被积函数拆成不同的部分分别使用对称性计算积分**的方法是十分重要的，如果例4不使用对称性而是直接计算，计算量是异常巨大的。

1.3 三重积分换元法

我们首先回忆二重积分换元的两个目的：简化被积函数简化和简化积分区域。由于三重积分计算量大，换元对于积分的计算是格外重要的，甚至说三重积分换元法是计算三重积分的主要方法。

三重积分的一般换元法则

考虑三元换元

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases} \tag{18}$$

满足三个条件
1.是区域Ω'到Ω的一个双射，即既是单射也是满射。
2.函数$x(u,v,w)$，$y(u,v,w)$和$z(u,v,w)$都具有连续的偏导数。
3.Jacobi行列式$J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$在$(\xi,\eta)\in D'$处处非0。
那么有如下结论

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w, \tag{19}$$

其中Jacobi行列式

$$J=\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{20}$$

从最直观的角度看，三重积分换元依然是用自变量(u,v,w)在区域Ω'的积分等效地替代自变量(x,y,z)在Ω的积分，为了确保等号成立加入了体积微元关系

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \tag{21}$$

与二重积分类似，三重积分换元的目的依然是将一个三重积分化为更好计算的三重积分，换元的具体步骤不变
1.写出换元之前的三重积分，画出其积分区域。
2.写出换元使用的映射（如式(18)）及其Jacobi行列式J。
3.根据映射(18)求换元后的新积分区域Ω'：这里Ω'代表$(x,y,z)\in\Omega$时(u,v,w)的所有取值。对于复杂的换元计算Ω'很麻烦，但是对于有几何意义的简单换元这一步骤非常简单。
4.根据公式(19)写出新的二重积分。

柱坐标换元法

柱坐标换元法是指如下的换元规则

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, & 0\leqslant r<+\infty, \\ y=r\sin\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ z=z, & -\infty\leq z<+\infty, \end{cases} \tag{22}$$

其雅可比行列式非常简单：

$$J=\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(r,\theta,z)}=r. \tag{23}$$

由此得到柱坐标换元

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z. \tag{24}$$

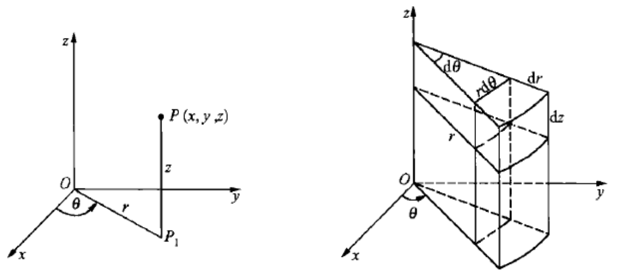

图 5: 柱坐标自变量示意图。

柱坐标具有直观的几何意义，如图所示，自变量r代表点(x,y,z)到z轴的距离，即$z=\sqrt{x^2+y^2}$，θ则代表了(x,y,z)在XoY平面与x轴夹角。另一种理解是，考虑点(x,y,z)在XoY平面的投影(x,y)，(r,θ)是(x,y)在XoY平面的极坐标。另一种直观的理解是，考虑对圆柱$\Omega=\{x^2+y^2\le 1, z\in[0,1]\}$的三重积分，积分区域$\Omega$可以看作一个蛋糕，我们吃蛋糕时会先将蛋糕切成若干个角形，我们对每个角形积分就相当于对给定的θ先对r,z积分。

柱坐标两种常用的使用情况：

1.由于柱坐标满足$x^2+y^2=r^2$，所以当被积函数涉及项x^2+y^2时，使用柱坐标可以使被积函数变简单。

2.由于柱坐标的几何性质，当积分区域是柱体或柱体的一部分时，或确定积分区域的曲线涉及项x^2+y^2时，柱坐标区域可以大大简化积分区域。

例 5. 求$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由空间曲面$x^2+y^2=9, x^2+y^2=16, z=0, z=\sqrt{x^2+y^2}$围成区域。

分析：本题从被积函数和积分区域上看都适合使用柱坐标变换。

Proof. 柱坐标换元的关键是求出新的积分区域。考虑到Ω是两个柱体夹出的部分并且z方向被坐标平面XoY和“碗状曲面”$z=\sqrt{x^2+y^2}$相割，所以得到Ω'满足的条件、

$$\begin{cases} 3\le r\le 4, \\ 0\le z\le r, \\ 0\le\theta\le 2\pi. \end{cases} \tag{25}$$

我们写出新的三重积分

$$I=\iiint_{\Omega'} r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z, \tag{26}$$

我们在图中画出了新的积分区域Ω'，但是与二重积分换元法类似，更重要的并非是画出Ω'，而是通过关系式(25)确定累次积分的积分区域。因为被积函数r^2只与r有关，

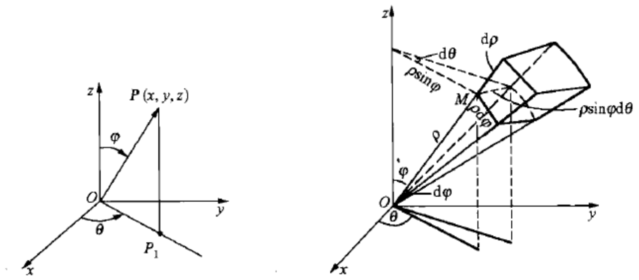

图 6: 球坐标自变量示意图。

我们考虑先对(θ,z)二重积分然后外层对r积分。固定$r\in[3,4]$。自变量(θ,z)的取值范围是矩形$[0,2\pi]\times[0,r]$。写出累次积分并计算

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega'} r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= \int_3^4\left(\iint_{[0,2\pi]\times[0,r]} r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\right)dr=\int_3^4 2\pi r^3\mathrm{d}r=\frac{175\pi}{2}. \end{aligned} \tag{27}$$

□

球坐标换元法

球坐标是指如下的换元规则

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, & 0\leqslant\rho<+\infty, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ z=\rho\cos\varphi, & 0\leqslant\theta<2\pi, \end{cases} \tag{28}$$

雅可比行列式:

$$J=\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(\rho,\varphi,\theta)}=\rho^2\sin\varphi. \tag{29}$$

由此得到球坐标换元

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta. \tag{30}$$

球坐标具有直观的几何意义，如图所示，自变量ρ代表点(x,y,z)到原点的距离，即$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，φ代表点(x,y,z)和原点的连线与z轴的夹角，由φ和ρ可以确定坐标$z=\rho\cos\varphi$；θ则与柱坐标类似，是在z确定以后代表(x,y,z)在XoY坐标的投影与x轴的夹角。

球坐标两种常用的使用情况：

1.由于球坐标满足$x^2+y^2+z^2=\rho^2$，所以当被积函数涉及项$x^2+y^2+z^2$时，使用球坐标可以使被积函数变简单；

2.由于球坐标的几何性质，当积分区域是球体或是球体的一部分时，或是确积分区域的曲线涉及项$x^2+y^2+z^2$时，球坐标区域可以大大简化积分区域。

例 6. 求$\iiint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$D$是球体$x^2+y^2+z^2\le 2z$。

分析：由于积分区域不是最标准的圆，我们既可以直接使用球坐标换元法，也可以在最基本的球坐标变换上做一些处理。此外由于本题被积函数比较简单，只与y一个自变量有关，因此不进行换元而选择直接化累次积分也是可行的。

Proof. **方法1.圆心不在原点的球坐标变换** 由于积分区域是以$(0,0,1)$为球心，1为半径的球，我们希望在球坐标变换上进行调整，选择的换元是：

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, & 0\leqslant\rho<+\infty, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ z=1+\rho\cos\varphi, & 0\leqslant\theta<2\pi, \end{cases} \tag{31}$$

这样的处理不会改变球坐标换元的雅克比行列式，得到的新的积分区域矩体是$\Omega'=[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$，据此我们直接写出换元后的积分

$$I=\iiint_{\Omega'}\rho^4\sin^3\varphi\sin^2\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta. \tag{32}$$

模仿矩形上二重积分的分离变量计算法，我们也可以使用分离变量法计算上述三重积分：

$$I=\left(\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho\right)\cdot\left(\int_0^\pi\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi=\frac{4}{15}\pi. \tag{33}$$

方法2.直接使用球坐标换元 新的积分区域Ω'满足$\rho^2\le 2\rho\cos\varphi$，相当于$\rho\le 2\cos\varphi$，对自变量$\theta$并没有限制，得到新的累次积分

$$I=\iiint_{\Omega'}\rho^4\sin^3\varphi\sin^2\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta. \tag{34}$$

由于积分区域对θ没有性质，我们首先对θ积分，(r,φ)的取值范围$D_{(r,\varphi)}$满足$0\le\rho\le\cos\varphi$，值得注意的是这一条件隐藏了$\cos\varphi\ge 0$，所以$\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$，这一点通过示意图也可以看出。

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{(r,\varphi)}}\rho^4\sin^3\varphi\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \\ &= \pi\iint_{D_{(r,\varphi)}}\rho^4\sin^3\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \tag{35}$$

然后用先积ρ后积φ的方法计算重积分

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{(r,\varphi)}} \rho^4 \sin^3\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \left(\int_0^{2\cos\varphi} \rho^4 \mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{32}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^5\varphi \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{32}{5}\int_0^1 t^5(1-t^2)\mathrm{d}t\text{（定积分换元}t=\cos\varphi\text{）} \\
&= \frac{4}{15}. \qquad (36)
\end{aligned}$$

我们指出，本题使用球坐标直接计算的方法虽然是课本例题，但是需要着重关注积分区域Ω'的确定。由于球坐标的复杂性我们不能直接从视觉上看出精准的范围，代入球方程可以得到$0\le\rho\le 2\cos\varphi$，这背后隐藏的要求$\cos\varphi\ge 0$值得关注，否则ρ就没有取值范围了；从几何的角度看，由于Ω完全位于$z\ge 0$的一侧，因此$\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$。

方法3.直接化累次积分

由于被积函数只含y，我们用“先一后二”的积分顺序固定y内层对(x,z)做二重积分。对于固定的$y\in[0,1]$，(x,z)的取值方程是$x^2+(z-1)^2\le 1-y^2$，是以$(0,1)$为圆心$\sqrt{1-y^2}$为半径的圆，记为$D^y_{(x,z)}$。

$$\begin{aligned}
\iiint_D y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{-1}^1 y^2\left[\iint_{D^y_{(x,z)}} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^1 \pi y^2(1-y^2)\mathrm{d}y = \frac{4}{15}\pi. \qquad (37)
\end{aligned}$$

□

在上述积分中，我们使用了如下的关于三角函数的幂的积分公式

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x, \quad n\ge 0. \qquad (38)$$

其中

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{是奇数}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{是偶数}. \end{cases} \qquad (39)$$

特别地，!!代表双阶乘，即

$$n!! = \begin{cases} n\times(n-2)\times\cdots\times 1, & n\text{是奇数}, \\ n\times(n-2)\times\cdots\times 2, & n\text{是偶数}. \end{cases} \qquad (40)$$

上述公式可以使用定积分的分部积分推导，具体可以参加上册定积分讲义。上述积分会反复出现在重积分计算，建议同学们背下来上述公式以加快计算速度。

2 经典习题

三重积分部分的题目普遍思路简单，计算量大，学习三重积分主要是学习如何减低计算量。对称法，分项积分，积分顺序和换元方式的合理选择都非常重要，此外也有部分题目的难度来源于图形的复杂带来的空间想象难度，或是定积分的计算。由于课本习题中有大量直接套用柱坐标或球坐标计算的题目，我们的例题中主要选择课本习题少有涉及的题目类型，但是**请务必优先掌握课本习题的类型再掌握这些例题**。

2.1 例题

在本章的例题解答中，为了阅读方便，我们省去详细的分步过程，读者可以自行总结重积分计算思路和步骤。

题 1. 求$I=\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$的内部。

分析：本题虽然是课本例题，却十分经典。本题借助分项积分和对称性，有非常简单的计算方法。

Proof. 分项计算积分I，考虑被积函数

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz,$$

而由于积分区域是一个椭球，椭球关于三个坐标平面都是对称的，模仿例4的方法使用对称性

$$\iiint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_D yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_D xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0. \tag{41}$$

剩下部分的积分包含项$x^2+y^2+z^2$，这三项每一项都是只关于一个自变量的函数，所以单独对每一项计算是不难的。考虑$\iiint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，由于被积函数只与$x$有关，我们选择“先二后一”的积分顺序，对固定的$x$首先对$(y,z)$进行二重积分:对给定的$x\in[-a,a]$，$y,z$的取值范围$D^x_{(y,z)}$为椭圆$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1-\frac{x^2}{a^2}$，$x$本身的取值范围是$x\in[-a,a]$。特别地，椭圆$D^x_{(y,z)}$的两条半轴长为$\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}$和$\sqrt{c^2-\frac{c^2x^2}{a^2}}$。因此椭圆$D^x_{(y,z)}$的面积为

$$S^x_{(y,z)}=\pi\sqrt{\left(b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}\right)\left(c^2-\frac{c^2x^2}{a^2}\right)}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right). \tag{42}$$

接下来进行计算

$$\begin{aligned}\iiint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{-a}^{a}x^2\left[\iint_{D^x_{(y,z)}}1\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\\ &= \pi bc\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{15}\pi a^3bc.\end{aligned} \tag{43}$$

同理可以计算出

$$\iiint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi ab^3c,\iiint_D z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3. \tag{44}$$

在计算过程中，我们对不同项使用了不同的积分顺序以达到减少计算量的目的。题目所求积分为

$$\iiint_D (x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2). \tag{45}$$

□

题 2. 求$I=\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$，其中$\Omega$是单位球$x^2+y^2+z^2\le 1$。

分析：本题是计算量偏大的三重积分题目，方法不唯一但各种方法计算量都很大。

Proof. 如果从积分区域是单位球来看，使用球坐标换元法应当是最简单的，柱坐标变换也可以做。本题中有诸多细节需要注意。

1.柱坐标换元法 换元得到的新积分是

$$I=\iiint_{\Omega'}\frac{r}{\sqrt{r^2+(z-2)^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta, \tag{46}$$

其中积分区域Ω'满足$r^2+z^2\le 1$且$r\ge 0$。由于被积函数和积分区域都和θ无关，我们首先对θ积分转化为二重积分

$$\iiint_{\Omega'}\frac{r}{\sqrt{r^2+(z-2)^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta=2\pi\iint_{D-}\frac{r}{\sqrt{r^2+(z-2)^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}z. \tag{47}$$

然后用化累次积分的方法计算二重积分：对于给定的$z\in[-1,1]$，自变量$r\in[0,\sqrt{1-z^2}]$，这里需要特别注意r作为柱坐标的径长必须非负：

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi\iint_{D.}\frac{r}{\sqrt{r^2+(z-2)^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\frac{r}{\sqrt{r^2+(z-2)^2}}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{r^2+(z-2)^2}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{5-4z}-(2-z)\right)\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{3}.
\end{aligned} \tag{48}$$

2.球坐标换元法 换元得到的新积分是

$$I=\iiint_{\Omega'}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\varphi+4}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta, \tag{49}$$

其中积分区域Ω'是矩体$[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$。我们依然可以将$\theta$的部分提出来

$$\iiint_{\Omega'}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\varphi+4}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=2\pi\iint_{D'}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\varphi+4}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi, \tag{50}$$

其中D'是矩形$[0,1]\times[0,\pi]$。首先对φ积分并应用凑微分的方法

$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi\iint_{D'}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\varphi+4}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi\int_0^1\left(\int_0^\pi\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\varphi+4}}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi\int_0^1\frac{\rho}{2}\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\varphi+4}\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi\int_0^1\frac{\rho}{2}\left(|\rho+2|-|\rho-2|\right)\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi}{3}. \qquad (51)
\end{aligned}
$$

另外，本题也可以用以$(0,0,2)$为球心的球坐标换元法做，计算量与前两种做法相当，请读者自行尝试。 □

题 3. 求$I=\iiint_\Omega\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是曲面$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=4xy$与坐标平面所围区域在第一卦限的部分。

分析：本题确定Ω的曲面异常复杂以至于我们无法直接画出区域Ω的图形。为了增加对区域Ω的理解，我们必须采用球坐标换元的方法，在简化积分区域的同时增加对于Ω的了解。这类问题属于抽象曲面确定的三重积分问题，换元法在这类问题起重要作用。

Proof. 应用球坐标换元法，我们将曲面$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=4xy$转为球坐标方程

$$\rho^4=4\rho^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta, \qquad (52)$$

由于我们考虑第一卦限，这说明$\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$和$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，对于第一卦限的$(\varphi,\theta)$，径长$\rho$具有给定的唯一正值，由此曲面$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=4xy$围成的区域换元得到

$$\Omega'=\{(r,\varphi,\theta):0\le\rho\le 2\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}\}. \qquad (53)$$

写出新的积分

$$I=\iiint_{\Omega'}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta. \qquad (54)$$

考虑到我们推断出的Ω'的形式，我们内层必须对ρ积分：对给定的$(\varphi,\theta)\in[0,\frac{\pi}{2}]^2$，$\rho$的取值范围$0\le\rho\le2\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$，所以

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega'}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]^2}\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\left(\int_0^{2\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\rho^3\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= 4\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]^2}\sin^5\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\right)=8\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{9}. \qquad (55)
\end{aligned}
$$

对于这类复杂曲面确定区域上的三重积分，我们更多时候无需画出Ω的具体图形，只需要（通常是在柱坐标或球坐标意义下）分析出对于给定的自变量其他自变量的取值范围，然后以此写出累次积分即可。 $\square$

题 4. 设参数$a, b, c > 0$，求曲面$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = ax$与坐标平面所围区域在第一卦限的部分的体积。

分析：本题与上一题类似，曲面$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = ax$依然非常复杂难以直接理解，我们需要利用换元的方法获取曲面的信息，考虑到曲面左侧有椭球的形式我们选择椭球坐标换元法。

Proof. 设曲面$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = ax$与坐标平面所围区域在第一卦限的部分的图形为$\Omega$，我们要计算的便是三重积分$I = \iiint_\Omega 1\mathrm{d}V$。

椭球坐标换元法也称广义球坐标换元法，是球坐标换元法的简单推广，在球坐标换元的基础上增加系数：

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\varphi\cos\theta, & 0 \leqslant \rho < +\infty, \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ z = c\rho\cos\varphi, & 0 \leqslant \theta < 2\pi, \end{cases} \tag{56}$$

与球坐标换元类似，这样做的好处是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \rho^2$，可以简化题目讨论的曲面的形式。椭球坐标换元法的Jacobi行列式为

$$J = \frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(\rho, \varphi, \theta)} = abc\rho^2\sin\varphi. \tag{57}$$

在换元后得到的积分是

$$I = \iiint_{\Omega'} abc\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta, \tag{58}$$

其中Ω'是待确定的新的积分区域。

另一方面椭球坐标换元使得曲面方程简化为

$$\rho^4 = a^2\rho\sin\varphi\cos\theta. \tag{59}$$

由于Ω位于第一卦限，即$(\varphi, \theta) \in [0, \frac{\pi}{2}]^2$，于是换元得到的新区域$\Omega'$中自变量$\rho$的取值范围是

$$0 \leq \rho \leq a^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\sin\varphi\cos\theta}. \tag{60}$$

由此我们采用固定(φ,θ)先积ρ的方式计算积分(58)：

$$\begin{aligned}
I &= abc\iiint_{\Omega'}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= abc\iint_{D'}\sin\varphi\left(\int_0^{a^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\sin\varphi\cos\theta}}\rho^2\right)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^3bc}{3}\iint_{D'}\sin^2\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,
\end{aligned} \tag{61}$$

其中$D'=[0,\frac{\pi}{2}]^2$是(φ,θ)的取值范围，用分离变量的积分方法

$$I=\frac{a^3bc}{3}\iint_{D'}\sin^2\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\frac{a^3bc}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)=\frac{a^3bc\pi}{12}. \tag{62}$$

本题的一个易错点是，部分同学会将区域体积公式错写为$\iiint_{\Omega'}1\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$而不是$\iiint_{\Omega}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其原因是只有在直角坐标上某区域的体积才能写出该区域上对被积函数1的积分$V=\iiint_{\Omega}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，如果要在非直角坐标系上研究体积就必须从直角坐标系上换元得到，即

$$V=\iiint_{\Omega}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'}|J|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta. \tag{63}$$

□

题 5. 设参数$a,b,c>0$，令$h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，设f是$\mathbb{R}$上的连续函数，求证$\iiint_{\Omega}f(ax+by+cz)\mathrm{d}V=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)\mathrm{d}t$，其中$\Omega$是单位圆$x^2+y^2+z^2\le 1$。

分析：本题是2021期中考试压轴题的姊妹题，其主要思路有两点：第一，为了使得等式右侧的三重积分得到右侧的定积分，可以首先采取某种三重积分换元，然后对得到的新的三重积分使用分离变量法；第二，我们可以通过几何直观来考虑，将单位球Ω按照$ax+by+cz$的取值分层拆分，向定积分化简。我们首先采用直观想法叙述，然后写出严格证明，二者实际意味相同。本题的严格证明叙述上必须借助线性代数知识，没有学过线性代数的同学只需掌握直观思路即可。

Proof. **直观思路** 对$(x,y,z)\in\Omega$，有$ax+by+cz\in[-h,h]$。我们将区间$[-h,h]$分为N部分：

$$-h=u_0<u_1<\cdots<u_{N-1}<u_N=h, \tag{64}$$

其中$\Delta u_k=u_k-u_{k-1}$。取$k=0,1,\cdots,N$，$N+1$个平面$ax+by+cz=u_k$平行地与单位球Ω相割。此时我们考虑每两个相邻平面$ax+by+cz=u_{k-1}$和$ax+by+cz=u_k$割球得到的小区域Ω_k，区域上$ax+by+cz\in[u_{k-1},u_k]$。如果考虑N足够大，换言之每一个Δu_k都足够小，那么我们可以认为Ω_k上的每一个点$ax+by+cz$的取值都是恒定

为u_k，因此可以通过累加各个Ω_k近似三重积分

$$\iiint_\Omega f(ax+by+cz)\mathrm{d}V \approx \sum_{k=1}^N f(u_k)\mathcal{V}(\Omega_k). \tag{65}$$

其中$\mathcal{V}(\Omega_k)$代表Ω_k的体积。

我们下一步需要计算Ω_k的体积，它由两个相邻平面$ax+by+cz=u_{k-1}$和$ax+by+cz=u_k$割得。由此Ω_k的上下平面圆的半径分为$\sqrt{1-\left(\frac{u_k}{h}\right)^2}$和$\sqrt{1-\left(\frac{u_{k-1}}{h}\right)^2}$，模仿梯形面积的计算公式可以计算$\Omega_k$的体积为

$$\mathcal{V}(\Omega_k)=\frac{\pi\Delta u_k}{2}\left(1-\left(\frac{u_k}{h}\right)^2+1-\left(\frac{u_{k-1}}{h}\right)^2\right)=\pi\Delta u_k\left(1-\left(\frac{u_k}{h}\right)^2\right)+o\left[(\Delta u_k)^2\right]. \tag{66}$$

取$\Delta u_k\to 0$并舍弃高阶的无穷小量

$$\mathcal{V}(\Omega_k)\approx\pi\Delta u_k\left(1-\left(\frac{u_k}{h}\right)^2\right). \tag{67}$$

然后代入式(65)得

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f(ax+by+cz)\mathrm{d}V &\approx \sum_{k=1}^N f(u_k)\mathcal{V}(\Omega_k)\approx\pi\sum_{k=1}^N f(u_k)\left(1-\left(\frac{u_k}{h}\right)^2\right)\\ &\to \pi\int_{-h}^h\left(1-\frac{u^2}{h^2}\right)f(u)\mathrm{d}u=\pi\int_{-1}^1 f(hu)(1-u^2)\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{68}$$

严格思路 根据此前分析，我们希望沿着$ax+by+cz$的方向计算三重积分，因此我们需要某种换元T

$$T\begin{cases}u= & \frac{ax+by+cz}{h},\\ v= & v(x,y,z),\\ w= & w(x,y,z).\end{cases} \tag{69}$$

其中换元函数v,w是未知的。另一方面，考虑到右侧定积分的形式，我们希望单位球Ω在经过换元T后形状依然是一个球以保证积分的简便，满足这一要求的一种换元T便是线性空间中的正交变换，即取三阶正交矩阵$A=(a_{i,j})_{i,j=1}^3$使得

$$\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \tag{70}$$

由于A的第一行向量是确定的单位向量

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{h}&\frac{b}{h}&\frac{c}{h}\end{pmatrix}. \tag{71}$$

考虑到正交矩阵各个行向量构成正交向量组，只要用施密特正交化的方法就可以得到正交矩阵A。

我们接下来利用正交变换(70)来证明例题。首先是Jacobi行列式的计算

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\det\left(A^{-1}\right)=1, \tag{72}$$

这里需要注意正交矩阵的性质$\det(A)=\det(A^{-1})=1$。由于正交矩阵的几何意义是欧式空间中的旋转，所以得到新的积分区域Ω'仍是单位球$u^2+v^2+w^2\le 1$，新的三重积分是

$$\iiint_\Omega f(ax+by+cz)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega'} f(hu)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \tag{73}$$

对于新的积分，我们使用“先二后一”的积分顺序，固定u对(v,w)二重积分：对于给定u，自变量(v,w)的取值范围是圆心为原点的圆$v^2+w^2\le 1-u^2$记作$D^u_{(v,w)}$

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega'} f(hu)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w &= \int_{-1}^{1} f(hu)\left(\int_{D^u_{(v,w)}} 1\mathrm{d}v\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}u \\ &= \pi\int_{-1}^{1} f(hu)(1-u^2)\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{74}$$

□

2.2 精选补充题

补 1. ***2021春季期中考试题.*** 求$I=\iiint_\Omega(y^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$代表区域$0\le z\le x^2+y^2\le 1$。

补 2. 求$\iiint_\Omega z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是球体$x^2+y^2+z^2\le 2z$。

补 3. 设$N\in\mathbb{N}^*$，记n维空间单位球$\sum_{k=1}^n x_k^2\le 1$的体积为$\alpha(n)$，计算$\alpha(4)$，并写出序列$\alpha(n)$的递推表达式。

补 4. 设$\Omega=\{(x,y,z)\,|0\leqslant x+y-z\leqslant 1, 0\leqslant y+z-x\leqslant 1, 0\leqslant x+z-y\leqslant 1\}$是六个平面相交形成的区域，求重积分$I=\iiint_\Omega(x+y-z)(y+z-x)(x+z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

补 5. 设参数$a,b,c>0$，求曲面$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$围成空间图形的体积。（提示：模仿椭球坐标换元法设计合适的换元方式）

补 6. 求$I=\iiint_\Omega(x+y+z)^2\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是$x^2+y^2\le 2z$和$x^2+y^2+z^2\le 3$相交部分。（提示：拆分被积函数并利用对称性）